



به نام دوست

پاسخ نامه ی تکلیف

شماره ی تکلیف: ۳۲

مبحث: آنالیز ترکیبی

پایه: دهم

۱۹۱۵

ردیف

این پاسخ نامه بیشتر جنبه ی آموزشی برای دانش آموزان در مسیر نوشتن پاسخ دارد. مصحح با توجه به پاسخ نامه و صلاح دید خود تصحیح خواهد نمود.

۶ نفر با نام های a, b, c, d, e و f را در نظر بگیرید:

۱ این ۶ نفر به چند طریق در یک ردیف قرار می گیرند؟

اگر n نفر یا شی بخواهند در یک ردیف قرار بگیرند این کار به $n!$ حالت مقصور است: $6!$

۲ این ۶ نفر به چند طریق می توانند دور یک میز بنشینند؟

اگر n نفر یا شی بخواهند در یک سیکل بسته مثل یک میز دایره ای قرار بگیرند به $(n-1)!$ حالت می توانند قرار بگیرند: $(6-1)! = 5!$

۳ این ۶ نفر به چند طریق می توانند سوار یک چرخ و فلک ایستا شوند؟

اگر سیکل بسته ای بالا نما از دو طرف باشد (یعنی از دو طرف زاویه ی دید داشته باشد) $\frac{(n-1)!}{2}$ حالت می تواند قرار بگیرد: $\frac{(6-1)!}{2} = \frac{5!}{2}$

۴ اگر قرار باشد ۴ نفر از این ۶ نفر انتخاب شوند به چند طریق می توانند در یک ردیف بیایستند؟

$4! \times \binom{6}{4} = 24 \times 15 = 360$ انتخاب ۴ نفر از ۶ نفر

۵ اگر قرار باشد ۴ نفر از این ۶ نفر انتخاب شوند به چند طریق می توانند دور یک میز بنشینند؟

$3! \times \binom{6}{4} = 6 \times 15 = 90$ میز دایره ای و انتخاب ۴ نفر از ۶ نفر

۶ اگر قرار باشد ۴ نفر از این ۶ نفر انتخاب شوند به چند طریق می توانند سوار یک چرخ و فلک ایستا شوند؟

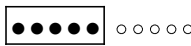
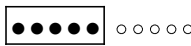
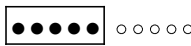
$\frac{3!}{2} \times \binom{6}{4} = 3 \times 15 = 45$

۷ اگر قرار باشد ۴ نفر از این ۶ نفر انتخاب کنیم و بدانیم a حتماً باید انتخاب شود و c نباید انتخاب شود، این ۴ نفر به چند طریق می توانند سوار اتوبوس شوند؟

a انتخاب شده، ۳ نفر دیگر باقی می ماندند و c نباید انتخاب شود پس ۳ نفر را از بین ۴ تای باقی مانده (f, e, d, b) انتخاب می کنیم و ۴ نفر را در یک ردیف قرار می دهیم: $4! \times 3 = 24 \times 3 = 72$

۸ این ۶ نفر به چند طریق سوار اتوبوس می شوند اگر قرار باشد c بلافاصله بعد از d سوار شود؟

	مثلاً اینکه بگوییم c و d را با یک طناب مکمل به هم بستیم تا خودشان جابجا نشوند و c پشت d باشد، پس ۵ دسته به ۵! حالت در یک ردیف قرار می‌گیرند:	
۹	این ۶ نفر به چند طریق سوار اتوبوس می‌شوند اگر قرار باشد c و d بلافاصله بعد از هم سوار شوند؟ در این مسئله c و d را به هم بستیم ولی می‌توانند جابجا شوند، پس ۲! هم برای جابجا شدن آنها؛ $(a)(b)(e)(f)(cd) = 5! \times 2!$	۱
۱۰	این ۶ نفر به چند طریق سوار اتوبوس می‌شوند اگر قرار باشد c بعد از d سوار شود؟ پهن کلاً ۶! حالت سوار می‌شوند، در نصف حالات c قبل از d و در نصف دیگر حالات d قبل از c سوار می‌شود. در واقع بایکشت دو شی c و d را با تقسیم بر ۲! بی‌اثر می‌کنیم؛ $\frac{6!}{2!}$	۱
۱۱	این ۶ نفر به چند طریق سوار اتوبوس می‌شوند اگر قرار باشد c, d و e بلافاصله بعد از هم سوار شوند؟ پهن c, d و e بلافاصله بعد از هم سوار می‌شوند بنابراین می‌توانیم این سه نفر را به عنوان یک گروه در نظر بگیریم. حالا فرض می‌کنیم این گروه را به عنوان یک نفر در نظر می‌گیریم. بنابراین ما در واقع ۴ واحد داریم؛ $(c d e), a, b, f$ حالا تعداد روش‌های پیدمان این ۴ واحد برابر ۴! است. اما از آنجا که c, d و e می‌توانند بین خودشان جابجا شوند تعداد راه‌های پیدمان این سه نفر برابر ۳! است. بنابراین : $4! \times 3!$	۱
۱۲	این ۶ نفر به چند طریق سوار اتوبوس می‌شوند اگر قرار باشد c بعد از d و d بعد از e سوار شود؟ بایکشت c, d و e برابر ۳! است؛ $\frac{6!}{3!}$	۱
۱۳	این ۶ نفر به چند طریق سوار اتوبوس می‌شوند اگر قرار باشد c بعد از d و d بعد از a سوار شود؟ بایکشت c, d و a برابر ۳! است؛ $\frac{6!}{3!}$	۱
۱۴	این ۶ نفر به چند طریق سوار اتوبوس می‌شوند اگر قرار باشد c بعد از e و d بعد از a سوار شود؟ بایکشت c, e, d و a برابر ۴! است؛ $\frac{6!}{4!}$	۱
۵ گوی سفید و ۵ گوی سیاه متمایز را در نظر بگیرید:		
۱۵	این گوی‌ها را به چند طریق می‌توان کنار هم چید اگر قرار باشد همه گوی‌های سیاه کنار هم باشند؟ $5! \times 6! =$ حالت پیدن خود سیاه‌ها $\times$ سیاه‌ها را یک دسته در نظر می‌گیریم با ۵ تا سفید	۱
۱۶	این گوی‌ها را به چند طریق می‌توان کنار هم چید اگر قرار باشد همه گوی‌های سفید کنار هم و گوی‌های سیاه نیز کنار هم باشند؟ $5! \times 5! \times 2! =$ سفیدها به ۵ حالت $\times$ سیاه‌ها به ۵ حالت $\times$ خود این دو دسته هم به ۲! حالت کنار هم قرار می‌گیرند	۱

۱۷	این گوی‌ها را به چند طریق می‌توان کنار هم چید اگر قرار باشد هیچ دو گوی سیاهی کنار هم نباشد؟ ابتدا ۵ گوی سفید را در کنار هم قرار می‌دهیم، چون گوی‌های سفید متمایزند پس تعداد راه‌های پیدمان آن‌ها ۵! است. برای قرار دادن گوی‌های سیاه بین گوی‌های سفید فضاهای ایجاد می‌شود. به این ترتیب ۶ فضای ممکن برای قرار دادن گوی سیاه داریم. چون گوی‌های سیاه نیز متمایزند پس برای هر انتخاب از فضاها، تعداد راه‌های پیدمان گوی‌های سیاه ۵! است. پس داریم: $5! \times \binom{6}{5} \times 5!$						
۱۸	این گوی‌ها را به چند طریق می‌توان کنار هم چید اگر قرار باشد بعضی از سیاه‌ها کنار هم باشند؟ <table><tr><th>همه A</th><th>بعضی</th><th>هیچ B</th></tr><tr><td> $6! \times 5!$</td><td>$10! - (A + B)$ $10! - \left(6! \times 5! + \binom{6}{5} \times 5! \times 5! \right)$</td><td> $\binom{6}{5} \times 5! \times 5!$</td></tr></table>	همه A	بعضی	هیچ B	 $6! \times 5!$	$10! - (A + B)$ $10! - \left(6! \times 5! + \binom{6}{5} \times 5! \times 5! \right)$	 $\binom{6}{5} \times 5! \times 5!$
همه A	بعضی	هیچ B					
 $6! \times 5!$	$10! - (A + B)$ $10! - \left(6! \times 5! + \binom{6}{5} \times 5! \times 5! \right)$	 $\binom{6}{5} \times 5! \times 5!$					
۱۹	این ۱۰ گوی را به چند طریق می‌توان یک در میان کنار هم چید؟ چون تعداد دو دسته مساوی است، بنابراین داریم: $5! \times 5! = 2 \times 5! \times 5!$						
۲۰	این ۱۰ گوی را به چند طریق می‌توان یک در میان دایره‌ای کنار هم چید؟ $5! \times 4!$						