۱۴,۷۵

امیر محمد جان

$f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-1}-\frac{x-1}{x}}$ ۰,۵

$\frac{x}{x-1}\geq\frac{x-1}{x} \rightarrow x^2-2x+1\geq x^2-x \rightarrow 1\geq x$

$\frac{x}{x-1}-\frac{x-1}{x}\geq 0 \rightarrow \frac{-2x+1}{x(x-1)}\geq 0$

| | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2x+1$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ | |
| | | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ |

$(-\infty,0)\cup[\frac{1}{2},1)$

ب) $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x}$ ۱,۵

$\frac{x^2}{x-1}+\frac{1}{x+1}\neq 0 \rightarrow x\neq -1, x\neq 0$

$x+1\neq 0, x\neq -2$ $\quad \Delta=5^2+6=49$

ریشه‌ها مخرج‌ها $\rightarrow \mp 1, 0, -2, -\frac{5}{2} \rightarrow D=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$

| | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $-\frac{5}{2}$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $2x+5$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| | | $+$ | ‖ | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | ‖ | $+$ | |

ج) $\sqrt{(\frac{1}{2})^x-9}(3^{x+2}-\frac{1}{3^x})\geq 0$ ۱,۵

$3^{x+2}-\frac{1}{3^x}=0 \rightarrow 3^{x+2}=3^{-x} \rightarrow x+2=-x \rightarrow x=-1$

$(\frac{1}{2})^x-9\geq 0 \rightarrow (\frac{1}{2})^x\geq 3^2 \rightarrow x\leq -2$

| | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(\frac{1}{2})^x-9$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $3^{x+2}-\frac{1}{3^x}$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | |

$(-\infty,-2]\cup\{-1\}$

د) $\sqrt{x-1}+\sqrt{y+1}=3$ ۱,۵

$x\geq 1 \quad y\geq -1$

$\sqrt{x-1}\geq 0 \rightarrow 3\geq\sqrt{y+1}\geq 0 \rightarrow 9\geq y+1\geq 0 \rightarrow 8\geq y\geq -1$

دقت! $\quad \sqrt{x-1}\leq 3 \rightarrow x-1\leq 9 \rightarrow x\leq 10$

$x$ حداکثر ۸ $\quad$ $[1,8]$

$y=\frac{\log_4(x^2-x-2)}{\sqrt{x^2-1}+1}$ ۱,۲۵

$x^2-x-2>0 \rightarrow (x-2)(x+1)>0$

| | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| | | $+$ | ‖ | $-$ | ‖ | $+$ | |

$\log_a^{a>0} \quad b>0 \quad b\neq 1$

$x^2\geq 1 \rightarrow x\geq 1$ یا $x\leq -1$

$\sqrt{x^2-1}\neq -1$ همواره

$\cap \rightarrow (-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

$\sqrt{12+ax-x^2}\geq 0 \rightarrow [-2,b] \quad a+b=?$ ۱,۷۵

$-(x^2-ax-12)\geq 0 \xrightarrow{\times -2} x^2+2x-12=0 \rightarrow 1+2a<0 \rightarrow 2a<-1 \rightarrow a=-\frac{1}{2}$

$-x^2-\frac{x}{2}+12\geq 0 \rightarrow \Delta=\frac{1}{4}-4(-1)(12)=\frac{97}{4}$

$x=\frac{-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{97}}{2}}{-2} \rightarrow \begin{cases}x_1=-3\\ x_2=\frac{3}{2}\end{cases} \rightarrow b=\frac{3}{2}$

$-3+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$ $\quad$ دقت: $\frac{1}{2}$

چطور تابع را چنین ضابطه‌ای کردی

$g(x)=\sqrt{f(x)-x}\geq 0 \rightarrow f(x)\geq x$ ۱,۷۵

برای جواب نهایی باید اجتماع بگیری نه اشتراک

$f(x)=\begin{cases}2x-2 & ;x\geq 1\\ 2x+3 & ;x<1\end{cases}$

$2x-2\geq x \rightarrow x\geq 2$

$2x+3\geq x \rightarrow x\geq -3$

$\cup \rightarrow [-3,1)\cup[2,+\infty)$

امیر محمد طوطیان

(۲) $f(x)=\begin{cases}(a+1)(x+2) & ; x>1\\ x^2+ax & ; x\le 1\end{cases}$ $\quad 2f(2)=f(-2)+a$ $\quad a=?$

$f(2)=\frac{f(-2)}{2}+\frac{a}{2} \to f(2)=(a+1)(2)=2a+2$

$f(-2)=4-2a \to 2a+2=\frac{4-2a}{2}+\frac{a}{2} \to 2a+2=2-a+\frac{a}{2}$

$\to \frac{3}{2}a=0 \to a=0$ ✓

(۲) $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+2$ $\quad f(\sqrt{3}-2)+f(\sqrt{3}+2)=?$

$\to (\sqrt{3}-1)^2+\frac{1}{(\sqrt{3}-1)^2}+2)(\sqrt{3}+1)^2+\frac{1}{(\sqrt{3}+1)^2}+2)$

$A^2=(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)+(\sqrt{3}-2)^2+(\sqrt{3}+2)^2+\frac{1}{(\sqrt{3}-2)^2}+\frac{1}{(\sqrt{3}+2)^2}+4$

$\to A=\sqrt{6}$ ✓ $\quad \frac{\sqrt{3}+2+\sqrt{3}-2}{\sqrt{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}}=\frac{A}{\sqrt{1}}=\sqrt{6}$

$\to 3+6\sqrt{2}=3+3\sqrt{6}+\sqrt{6}$ ✓

(۲) $2f(x)-3f(-x)=4x^2-3x$

$\xrightarrow{x=-x} \begin{cases}2f(-x)-3f(x)=4x^2+3x\\ 2f(x)-3f(-x)=4x^2-3x\end{cases}$

$\to 2f(x)=3f(-x)+4x^2-3x \to f(x)=\frac{3}{2}f(-x)+2x^2-\frac{3}{2}x$

$f(-x)=\frac{3}{2}f(x)+2x^2+\frac{3}{2}x$

$\xrightarrow{x=f(-x)} f(x)=\frac{9}{4}f(x)+\frac{9}{4}x+2x^2-\frac{3}{2}x \to -\frac{5}{4}f(x)=2x^2-\frac{3}{4}x$

$\to f(x)=-\frac{8}{5}x^2+\frac{3}{5}x$ ✓

(۲) $(x+2)f(x)-xf(x+2)=2x^3-3x^2+3x-1$ $\quad f(0)=?$

$\xrightarrow{f(0)} 2f(0)=-1 \to f(0)=\frac{-1}{2}$

$\xrightarrow{f(-2)} 6f(0)=12+3m-3m-1 \quad 2f(0)=1+m+\frac{1-3m}{2} \to 2f(0)=m+1$

$\xrightarrow{m=\frac{3}{4}} \frac{m+1}{2}=\frac{1-3m}{4} \to 4+4m=2-6m \to m=\frac{-1}{5}$ ✓ $\quad f(0)=\frac{m+1}{2}$

$\to f(0)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5}$ ✓

(۲) $f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{2x^2+2x+2}{x}$ $\quad f(-1)=?$

$f(x)+f(\frac{1}{x})=ax+b+a(\frac{1}{x})+b=ax+\frac{a}{x}+2b$

$ax+\frac{a}{x}+2b \to \frac{2x^2+2x+2}{x} \Rightarrow 2x+\frac{2}{x}+2$

$\frac{a}{1}=\frac{2}{1} \to a=2 \quad 2b=2 \to b=1$

$\to f(x)=2x+1 \to f(-1)=2(-1)+1=-1$ ✓