به نام خدا

Subject:
Year: Month: Day: ( ) 19,5 page: ( )

ونداد حاجی بابائی - یازدهم پسر B - تکلیف شماره ۲۵

با توجه به نمودار داریم:

$x=0 \Rightarrow y=1-\log_c(-b)=2 \Rightarrow \log_c(-b)=-1$ (۱)

$\Rightarrow c^{-1}=-b \Rightarrow \frac{1}{c}=-b \Rightarrow bc=-1$ (۲)

با توجه به فرض سوال $b+c=\frac{-3}{2}$ داریم:

$$\begin{cases} b+c=\frac{-3}{2} \\ bc=-1 \end{cases} \Rightarrow b-\frac{1}{b}=\frac{-3}{2} \Rightarrow b^2+\frac{3}{2}b-1=0 \Rightarrow \begin{cases} b=-2 \checkmark \\ b=\frac{1}{2} \times \end{cases}$$

b نمی‌تواند مثبت باشد چون در این صورت c صفر می‌شود و نمی‌تواند مبنای لگاریتم باشد
در نتیجه $b=-2$ که در این صورت $c=\frac{1}{2}$ می‌شود

برای محاسبه a از طول از مبدا استفاده می‌کنیم پس:

$x=-1/5=-\frac{3}{2} \Rightarrow 1-\log_c\left(-\frac{3}{2}a-b\right)=0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(-\frac{3}{2}a+2\right)=1$

$\Rightarrow -\frac{3}{2}a+2=\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2}a=\frac{-3}{2} \Rightarrow a=1 \checkmark$

$\Rightarrow (a+c)b=\left(1+\frac{1}{2}\right)(-2)=-3$ ✓

با توجه به نمودار داریم:

$f(0)=\frac{2}{3} \Rightarrow 1+c\times 3^a=\frac{2}{3} \Rightarrow c\times 3^a=\frac{-1}{3}$ (I)

$f(1)=0 \Rightarrow 1+c\times 3^{a+b}=0 \Rightarrow c\times 3^{a+b}=-1$ (II)

$\frac{(II)}{(I)} \Rightarrow \frac{c\times 3^a\times 3^b}{c\times 3^a}=\frac{-1}{-\frac{1}{3}} \Rightarrow 3^b=3 \Rightarrow b=1 \checkmark$ (۲)

$f(-1)=1+c\times 3^{a-1}=1+c\times 3^a\times\frac{1}{3} \xrightarrow{(I)} f(-1)=1+\left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$

$=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$ ✓

PAYCO

Subject:
Year: Month: Day: ( ) page: ( )

نقطه (۰،۲) روی تابع $y=c+\log_5(ax+b)$ قرار دارد پس:

$$2=c+\log_5 b \Rightarrow -c=(\log_5 b)-2$$

نقطه $(0.4,2)$ هم روی تابع قرار دارد پس:

$$0=c+\log_5(2.4a+b) \Rightarrow -c=\log_5(2.4a+b) \quad (۴)$$

$$\Rightarrow (\log_5 b)-2=\log_5(2.4a+b) \Rightarrow \log_5 b-\log_5(2.4a+b)=2 \quad (۲)$$

$$\Rightarrow \log_5 \frac{b}{2.4a+b}=2 \Rightarrow 5^2=25=\frac{b}{2.4a+b} \Rightarrow 60a+25b=b$$

$$\Rightarrow 60a=-24b \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{-24}{60}=\frac{-2}{5} \checkmark$$

$f(x)=\log_{\frac{1}{4}}^{(|x^2-2|-x)}$ ابتدا باید نامعادله $|x^2-|-x)>0$ را حل کنیم:

$$|x^2-2|-x>0 \Rightarrow |x^2-2|>x \quad (۴)$$

می دانیم همواره $|x^2-2|\geq 0$، پس تمام xهای منفی و نیز $x=0$ در این معادله صدق می کنند:

$x\in(-\infty,0]$ (I)

اکنون x مثبت باشد در این صورت:

$$|x^2-2|>x \Rightarrow \begin{cases} x^2-2>x \Rightarrow x^2-x-2=\underbrace{(x+1)}_{+}(x-2)>0 \Rightarrow x>2 & (II) \\ x^2-2<-x \Rightarrow x^2+x-2=(x-1)\underbrace{(x+2)}_{+}<0 \Rightarrow x<1 & (III) \end{cases}$$

$$D_f=(I)\cup(II)\cup(III)=(-\infty,0]\cup(0,1)\cup(2,+\infty)=(-\infty,1)\cup(2,+\infty) \checkmark$$

Subject:
Year: Month: Day: ( )
page: ( )

$x=1$ جواب معادله $f(x)=g(x)$ است، پس:

$f(1)=g(1) \Rightarrow 2+2^{b-a}=-1-3+8 \Rightarrow 2^{b-a}=2 \Rightarrow b-a=1$

$f^{-1}(10)=-1 \Rightarrow f(-1)=10 \Rightarrow 2+2^{b+a}=10 \Rightarrow 2^{b+a}=8 \Rightarrow b+a=3$

$\Rightarrow \begin{cases} b-a=1 \\ b+a=3 \end{cases} \Rightarrow 2b=4 \Rightarrow b=2 \Rightarrow a=1$ ✓ (۴)

$\Rightarrow 2b-a=4-1=3$ ✓

آگر $g(x)=x^3-x$ در نظر بگیریم آنگاه $g(1)=0$ و $g(2)=6$ بنابراین: (۶)

$f(x)=-2+\left(\frac{1}{2}\right)^{Ax+B}$, $f(1)=0$, $f(2)=2$ (۴)

$\Rightarrow f(1)=-2+\left(\frac{1}{2}\right)^{A+B}=0 \Rightarrow 2^{-A-B}=2 \Rightarrow -A-B=1 \Rightarrow A+B=-1$

$f(2)=-2+\left(\frac{1}{2}\right)^{2A+B}=2 \Rightarrow 2^{-2A-B}=4 \Rightarrow -2A-B=2 \Rightarrow 2A+B=-2$

$\begin{cases} A+B=-1 \\ 2A+B=-2 \end{cases} \Rightarrow A=-1 \Rightarrow B=0 \Rightarrow f(x)=-2+\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} \Rightarrow f(2)=2$ ✓

آگر جرم اولیه عنصر را m_0 در نظر بگیریم آنگاه جرم آن عنصر بعد از گذشت n ساعت برابر است با: (۷)

$m=m_0\times\left(\frac{1}{9}\right)^n \xrightarrow{m=\frac{1}{4}m_0} \frac{1}{4}m_0=m_0\left(\frac{1}{9}\right)^n$

$\Rightarrow \frac{1}{4}=\left(\frac{1}{9}\right)^n$ ① $\quad b_3^5=\frac{1}{b_3^2}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}=\frac{5}{12}$,

$b_5^3=\frac{1}{b_3^5}=\frac{1}{1/4}=\frac{5}{7}$ (۲)

حال از طرفین رابطه ① گیریم در مبنای $\frac{5}{7}$ می‌گیریم:

Subject:
Year: Month: Day: ( ) page: ( )

$\log_5 \frac{1}{6} = \log_5 (\frac{8}{9})^n \Rightarrow -\log_5 6 = n \log_5 \frac{8}{9}$

$\Rightarrow -(\log_5 2 + \log_5 3) = n(\log_5 8 - \log_5 9) = n(3\log_5 2 - 2\log_5 3)$

$\Rightarrow -(\frac{3}{12} + \frac{5}{7}) = n(\frac{5}{4} - \frac{10}{7}) \Rightarrow n = \frac{19}{3}$ (۷)

حال $\frac{19}{3}$ ساعت را به دقیقه تبدیل می‌کنیم: $\frac{19}{3} \times 60 = 380$ min ✓

اگر جرم اولیه عنصر را m_0 در نظر بگیریم؛ آنگاه جرم آن بعد از گذشت ۸ هفته برابر است با:

$m = m_0 \times (\frac{7}{8})^n \xrightarrow{m = \frac{1}{7} m_0} \frac{1}{7} m_0 = m_0 \times (\frac{7}{8})^n \Rightarrow \frac{1}{7} = (\frac{7}{8})^n$ (۱)

$\log_3 \frac{2}{3} = \frac{1}{\log_2 3} = \frac{1}{1,6} = \frac{5}{8}$ $\quad \log_3 \frac{7}{3} = \frac{1}{\log_7 3} = \frac{1}{0,6} = \frac{5}{3}$

حال از طرفین رابطه (۱) لگاریتم در مبنای ۳ می‌گیریم: (۸)

$\log_3 \frac{1}{7} = \log_3 (\frac{7}{8})^n \Rightarrow -\log_3 7 = n \log_3 \frac{7}{8} = n(\log_3 7 - \log_3 8)$ (۲)

$\Rightarrow -\log_3 7 = n(\log_3 7 - 3\log_3 2) \Rightarrow -\frac{5}{3} = n(\frac{5}{3} - \frac{5}{18}) \Rightarrow n = 8$

اکنون ۸ هفته را به روز تبدیل می‌کنیم: $8 \times 7 = 56$ روز ✓

مقدار ماده خالص در محلول در روزهای متوالی به صورت زیر است (فرض می‌کنیم محلول ۱۰۰ درصد خالص داریم)

روز اول: ۱۰۰ (غلظت ٪۱۰۰)

روز دوم: $100 - 4 = 96$ (غلظت ٪۹۶)

روز سوم: $96(1 - \frac{4}{100}) < 96 \Rightarrow 92,16\%$

اکنون می‌توانیم همین مقادیر به صورت زیر بنویسیم (۹)

$100, 100(1 - \frac{4}{100}), 100(1 - \frac{4}{100})^2, \dots$

Subject:
Year : Month : Day : ( )
page : ( )

بنابراین در روز $(n+1)$ام، یعنی پس از گذشت n روز مقدار ماده خالص برابر $100(1-\frac{4}{100})^n$ خواهد بود که باید $\frac{1}{3}$ ماده اولیه یعنی $\frac{100}{3}$ لیتر باشد، پس:

$$100\left(1-\frac{4}{100}\right)^n = \frac{1}{3}\times 100 \Rightarrow \left(\frac{24}{25}\right)^n = \frac{1}{3} \quad (2)$$

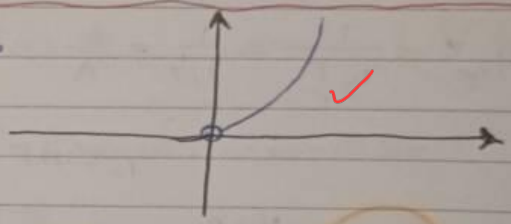
$$\Rightarrow n = \log_{\frac{24}{25}}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-\log 3}{\log\frac{24}{25}} = \frac{-\log 3}{\log 24 - \log 25} = \frac{-\log 3}{\log 8 + \log 3 - \log 100 + \log 4}$$

$$= \frac{-\log 3}{5\log 2 + \log 3 - 2} = \frac{-0/48}{3\times 0/3 + 0/48 - 2} = 24$$ ✓

بنابراین پس از ۲۴ روز غلظت این محلول $\frac{1}{3}$ غلظت اولیه می‌شود.

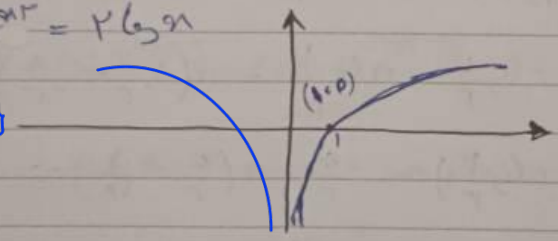
الف) $y = q^{\log_3 x} = x^{\log_3 q} = x^2$; $x > 0$

البته با شرط $x > 0$



ب) $y = \log_{x^2} 3 = \frac{1}{2}\log_x 3$

$D = \mathbb{R} - \{0\}$



(۱/۵)