سهیل براتی — تکالیف ۲۳ — یازدهم بهر B — ۲۰

۱) (۲)

$\log_n m = a \quad \log_{mn} m^۲n = b \quad \log_{mn} mn\times n = b \Rightarrow ۱+\log_{mn} n = b \Rightarrow ۱+\frac{۱}{\log_n mn} = b \Rightarrow ۱+\frac{۱}{۱+\log_n m} = b$

$\Rightarrow ۱+\frac{۱}{۱+a} = b \Rightarrow \frac{۲a+۱}{a+۱} = b \qquad \frac{a+۱}{a+۱} < b < \frac{۲a+۲}{a+۱} \Rightarrow ۱ < b < ۲ \Rightarrow [b] = ۱$ ✓

---

۲) (۲)

الف) $y = \sqrt{\frac{x}{\log_{\frac{۱}{۲}} x}} \qquad \log_{\frac{۱}{۲}} x = ۰ \Rightarrow x = (\frac{۱}{۲})^۰ = ۱$

$\log_{\frac{۱}{۲}} x \to x > ۰$

x		۰		۱	
y	$-$		$+$		$-$

$Df = (۰,۱)$ ✓

ب) $y = \frac{\log_e (x^۲-x-۲)}{\sqrt{x^۲-۱}+۱} \to \log_e (x^۲-x-۲) \to x^۲-x-۲ > ۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۱) > ۰$

x		-۱		۲	
y	$+$		$-$		$+$

$\sqrt{x^۲-۱} \to x^۲ \geq ۱ \Rightarrow \begin{cases} x \geq ۱ \\ x \leq -۱ \end{cases} \qquad Df = (-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$ ✓ $(-\infty,۱)\cup(۲,+\infty)$

---

۳) (۲)

$۲\log_x a + \log_a \sqrt{x} = ۲ \qquad \log_x a^۲ + \frac{۱}{۲}\log_a x = ۲ \Rightarrow \begin{cases} a > ۰ \\ a \neq ۱ \end{cases}$

$\log_x a^۲ + \log_{a^۲} x = ۲ \Rightarrow \log_x a^۲ + \frac{۱}{\log_x a^۲} = ۲ \Rightarrow t+\frac{۱}{t} = ۲ \Rightarrow t^۲-۲t+۱ = ۰ \to (t-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow t = ۱$

$\log_x a^۲ = ۱ \xRightarrow{x=۳} \log_۹ a^۲ = ۱ \Rightarrow a^۲ = ۹ \Rightarrow a = ۳$ ق ق ✓

$a = -۳$ غ ق ق

---

۴) (۲)

$\log ۲ = ۰٫۳ \quad \log ۳ = ۰٫۴ \quad (\log \frac{۵}{۳})x^۲ + (\log ۶)x - \underbrace{\log ۱۵}_{\log ۳+\log ۵} = ۰ \qquad ۱-\log ۲ = \log ۵ \Rightarrow \log ۵ = ۰٫۷$

$(\log ۵ - \log ۳)x^۲ + (۲\log ۲)x - (\log ۵ + \log ۳) = ۰$

$\Rightarrow ۰٫۳x^۲ + ۰٫۸x - ۱٫۱ = ۰$

$۳x^۲ + ۸x - ۱۱ = ۰ \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{۶۴+۱۳۲}}{۳} = \frac{۱۴}{۳}$ ✓

---

۵) (۲)

$\log_۲ ۷ = ۲٫۸ \quad \log_۵ ۲ = ۰٫۵ \quad \log_{۱۴} ۱۰ = ?$

$\log_۵ ۷ = \frac{\log_۲ ۷}{\log_۲ ۵} = \frac{۲٫۸}{۲} = ۱٫۴ \qquad \log_{۱۴} ۱۰ = \log_{۱۴} ۵ + \log_{۱۴} ۲ = \frac{۱}{\log_۵ ۱۴} + \frac{۱}{\log_۲ ۱۴} = \frac{۱}{\log_۵ ۷ + \log_۵ ۲} + \frac{۱}{۱+\log_۲ ۷}$

$\frac{۱}{۱٫۴+۰٫۵} + \frac{۱}{۱+۲٫۸} = \frac{۱}{۱٫۹} + \frac{۱}{۳٫۸} = \frac{۳}{۳٫۸} = \frac{۱۵}{۱۹}$ ✓

$\log_{۳}^{۵} = ۱٫۵$ $\log_{۲}^{۳} = ۱٫۶$ $\log_{۱۵}^{۶} = ?$ $\log_{۲}^{۵} = \frac{\log_{۳}^{۵}}{\log_{۳}^{۲}} = \frac{۱٫۵}{\frac{۱}{۱٫۶}} = \frac{۱۲}{۵} = ۲٫۴$ (۳) ۱۶

$\log_{۳}^{۲} = \frac{۱}{۱٫۶}$

$\log_{۱۵}^{۶} = \log_{۱۵}^{۲} + \log_{۱۵}^{۳} = \frac{۱}{\log_{۲}^{۱۵}} + \frac{۱}{\log_{۳}^{۱۵}} = \frac{۱}{\log_{۲}^{۳}+\log_{۲}^{۵}} + \frac{۱}{\log_{۳}^{۵}+\log_{۳}^{۳}} = \frac{۱}{۱٫۶+۲٫۴} + \frac{۱}{۱٫۵+۱} = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲٫۵}$

$= ۰٫۶۵$ ✓

$\log_{۸}^{۱۸} = m$ $\log_{۴}^{۱۲}$ $\frac{۱}{۳}\log_{۲}^{۱۸} = \frac{۱}{۳}\left(\log_{۲}^{۲\times۳\times۳}\right) = \frac{۱}{۳}\left(۱+۲\log_{۲}^{۳}\right) = m$ (۳) ۱۷

$\Rightarrow ۳m = ۱+۲\log_{۲}^{۳} \Rightarrow \frac{۳m-۱}{۲} = \log_{۲}^{۳} \Rightarrow \log_{۴}^{۱۲} = \frac{۱}{۲}\log_{۲}^{۱۲} = \frac{۱}{۲}\left(۲+\log_{۲}^{۳}\right) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۳m-۱+۴}{۲}\right) = \frac{۳m+۳}{۴}$

$\frac{۳}{۴}(m+۱)$ ✓

$(۰٫۴)^{۲x-۱} = \left(\frac{۱۲۵}{۸}\right)^{x^۲}$ $\log_{۸}(۹x+۱)$ $\left(\frac{۲}{۵}\right)^{۲x-۱} = \left(\frac{۵}{۲}\right)^{۳x^۲}$ (۳) ۱۸

$\left(\frac{۵}{۲}\right)^{-۲x+۱} = \left(\frac{۵}{۲}\right)^{۳x^۲} \Rightarrow ۳x^۲ = -۲x+۱ \Rightarrow ۳x^۲+۲x-۱=۰ \Rightarrow \frac{(x+۳)(x-۱)}{۳}$ $\begin{cases} x_۱ = \frac{-۳}{۳} = -۱ & \text{غ ق ق} \\ x_۲ = \frac{۱}{۳} & \text{ق ق} \end{cases}$

$\log_{۸}^{۹x+۱} \Rightarrow ۹x+۱>۰ \Rightarrow x > -\frac{۱}{۹}$ $\log_{۸}^{\frac{۹}{۳}+۱} = \log_{۸}^{۴} = \frac{۲}{۳}\log_{۲}^{۲} = \frac{۲}{۳}$ ✓

$\log_{۲}^{۳} = a$ $\log_{۸}^{b} = \frac{۲}{۳}(۱+a)$ $\log_{۸}^{b} = \frac{۲}{۳}\left(۱+\log_{۲}^{۳}\right) \Rightarrow \frac{۱}{۳}\log_{۲}^{b} = \frac{۲}{۳}\log_{۲}^{۶} \Rightarrow \log_{۲}^{b} = \log_{۲}^{۳۶}$ (۳) ۱۹

$\log^{۳b-۸} = \log^{(۳\times۳۶)-۸} = \log ۱۰۰ = ۲$ ✓ $b = ۳۶$ ✓

$-۴ax^۲+bx+\frac{۱}{۲}c=۰$ $\frac{۱}{\alpha+\beta} = \log ۴$ $a = \frac{b+c}{۲} \to b = ۲a-c$ (۳) ۲۰

$\frac{۱}{\alpha+\beta} = \log ۴ \Rightarrow \frac{۱}{S} = \frac{۴a}{b} = \frac{\overset{۲}{\cancel{۴}}a}{۲a-c} = \log ۴ = \cancel{۲}\log ۲ \to \frac{۲a}{۲a-c} = \log ۲$

$\to \frac{۲a-c}{۲a} = \log_{۲}^{۱۰} \to ۱-\log_{۲}^{۱۰} = \frac{c}{۲a} \Rightarrow ۲-\log_{۲}^{۱۰۰} = \frac{c}{a}$

$\left(۲^{-\frac{۱}{۸}}\right)^{\frac{c}{a}} = \left(۲^{\frac{c}{a}}\right)^{-\frac{۱}{۸}} = \left(۲^{۲-\log_{۲}^{۱۰۰}}\right)^{-\frac{۱}{۸}} = \left(\frac{۴}{۱۰۰}\right)^{-\frac{۱}{۸}} = ۵^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{۵}$ ✓