

۱- $f = \left\{ \left(\frac{3}{2}, 2 \right), (n, 5), \left(\frac{3}{n^2-n}, (-1, 4) \right) \right\}$ به دلیل $m=3$ $n^2-n=2 \Rightarrow n^2-n-2=0 \Rightarrow (n-2)(n+1)=0$
 $\Rightarrow n = \begin{cases} -1 \Rightarrow (n, 5) = (-1, 5) \\ 2 \Rightarrow (n, 5) = (2, 5) \end{cases}$ $\Rightarrow f = \left\{ \left(\frac{3}{2}, 2 \right), (2, 5), (-1, 4) \right\}$ $n=2$

۲- $f = \left\{ (-1, 1), (1, 2), (2, 3), (a, m-1), (a+2, n), \left(\frac{m}{2}, 3 \right) \right\}$ به دلیل $a=-1$ $n=2$
 $\Rightarrow f = \left\{ (-1, 1), (1, 2), (2, 3) \right\}$ $n=2$

۳- تابع را رسم می‌کنیم و چون شیب مثبت است و خط باید پایین خط است پس هم‌اگریم به صورتی می‌تواند باشد که به ازای $x=2$ شود و چون ضابطه پایین مساوی یک ندارد پس توخالی می‌شود $a < 1$ $(-\infty, 1)$

۴- تابع را رسم می‌کنیم و ضابطه بالا ضابطه خطی است که بر آن $(2, \infty)$ است و ضابطه پایین نیز یک خط است و اگر بخواهیم که تابع روبه رو یک به یک باشد شیب $a+1$ باید مثبت باشد (به ازای ضریب منفی غیر قابل قبول است) و همچنین پر دو تابع هم ضابطه اشتراکی با هم داشته باشند $0 < a \leq 3$ $(0, 3]$

۵- $y = x^3 + 2 \Rightarrow y_1 = x_1^3 + 2$ $y_2 = x_2^3 + 2$ $y_1 = y_2 \Rightarrow x_1^3 + 2 = x_2^3 + 2 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$
 $\Rightarrow x_1 = x_2$
 $\Rightarrow y = \sqrt[3]{x-2}$
 رسم $y = x^2 - 4x + 2$ تابع یک به یک نیست $\Rightarrow$ خط به ازای هر y در $\mathbb{R}$ دارد $\Rightarrow$ تابع یک به یک نیست

۶- $y = \frac{3x+1}{x-2}$ رسم می‌کنیم $\Rightarrow$ تابع یک به یک است $\Rightarrow y = \frac{2x+1}{x-3}$
 $y = \frac{2x+1}{x-3} \Rightarrow y(x-3) = 2x+1 \Rightarrow xy - 3y = 2x+1 \Rightarrow y(x-3) = 2x+1$
 $\Rightarrow y = \frac{2x+1}{x-3}$
 رسم $y = \frac{2x+1}{x-3}$ $\Rightarrow$ تابع یک به یک نیست $\Rightarrow$ رسم

رسم $y = \sqrt{x-3}$ برای تشخیص یک به یک بودن

تابع یک به یک است $\Rightarrow$

تبدیل تابع یک به یک $\Rightarrow x = \sqrt{y-3} \Rightarrow x^2 = y-3 \Rightarrow y = x^2 + 3$

ب) $y = x^2 - 4x + 3 \quad x \in [2, +\infty) \Rightarrow x_{min} = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow$ یک نقطه از سهمی است $\Rightarrow$ بردار $y = 2^2 - 4(2) + 3 = -1 \Rightarrow R = [-1, +\infty)$



تبدیل تابع یک به یک $\Rightarrow y = x^2 - 4x + 3 + 1 - 1 \Rightarrow y = x^2 - 4x + 4 - 1 \Rightarrow y = (x-2)^2 - 1$
 $\Rightarrow x = (y+1)^2 - 1 \Rightarrow x+1 = (y+1)^2 \Rightarrow \sqrt{x+1} = y+1 \Rightarrow y = \sqrt{x+1} - 1$

چون تابع برای دامنه محدودیت نداشته پس بردار اول دامنه تابع دوم است. $y = \sqrt{x+1} - 1 \quad x \in [-1, +\infty)$

$f(x) = x + \sqrt{x} \quad R_f = (0, +\infty) \Rightarrow D_f = (0, +\infty)$

تبدیل تابع یک به یک $x = y + \sqrt{y} \Rightarrow x = y + \sqrt{y} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \Rightarrow x = y + \sqrt{y} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \Rightarrow x = (\sqrt{y} + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4}$
 $\Rightarrow x + \frac{1}{4} = (\sqrt{y} + \frac{1}{4})^2 \Rightarrow \sqrt{x + \frac{1}{4}} = \sqrt{y} + \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x + \frac{1}{4}} - \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{توان 2}} y = x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \sqrt{x + \frac{1}{4}}$
 $\Rightarrow y = x + \frac{1}{4} - \sqrt{x + \frac{1}{4}} = ax + b - \sqrt{x-c} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{4} \\ c=-\frac{1}{4} \end{cases}$ خواسته سوال: $a+2b+4c = 1+1-1=1$

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}} \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-2}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-2}} \xrightarrow{\text{توان 2}} \frac{x_1^2}{x_1^2-2} = \frac{x_2^2}{x_2^2-2} \Rightarrow$

چون یک یونی تواند دو مختلاف $x_1 = \pm x_2$ علامت داشته باشند پس $x_1 = x_2 \leftarrow$ پس یک تابع یک به یک است.

تبدیل تابع یک به یک $x = \frac{y}{\sqrt{y^2-2}} \xrightarrow{\text{توان 2}} x^2 = \frac{y^2}{y^2-2} \Rightarrow x^2 y^2 - 2x^2 = y^2 \Rightarrow x^2 y^2 - y^2 = 2x^2$
 $\Rightarrow y^2(x^2-1) = 2x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{2x^2}{x^2-1} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{2x^2}{x^2-1}} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-1}}$

$f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad \text{راه اول: } f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|} \Rightarrow D_{f^{-1}} = \mathbb{R}, R_{f^{-1}} = (-1, 1)$

$x = \frac{y}{1+|y|} \Rightarrow x(1+|y|) = y \Rightarrow x + x|y| = y$
 اگر $y \geq 0$ $x + xy = y \Rightarrow x = y - xy \Rightarrow x = y(1-x) \Rightarrow y = \frac{x}{1-x}$
 اگر $y < 0$ $x - xy = y \Rightarrow x = y + xy \Rightarrow x = y(1+x) \Rightarrow y = \frac{x}{1+x}$
 $\Rightarrow f(x) = \frac{x}{1-|x|}; |x| < 1 \Rightarrow f(\frac{2}{5}) = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}$

$g(x) = \sqrt{x} - 1 \quad D_g = [0, +\infty), R_g = [-1, +\infty)$
 $x = \sqrt{y} - 1 \Rightarrow x+1 = \sqrt{y} \Rightarrow y = (x+1)^2$
 $g(\frac{2}{5}) = (\frac{2}{5}+1)^2 = \frac{49}{25}$
 خواسته سوال: $f(\frac{2}{5}) + g^{-1}(\frac{2}{5}) = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{14}{15}$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} \quad g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)} \xrightarrow{*} g(x) = x^3 + 1 + \sqrt{x^3 + 1}$$

-10

$$\xrightarrow[\text{دارد}]{f^{-1}(x)} x = \sqrt[3]{y-1} \Rightarrow x^3 = y-1 \Rightarrow y = x^3 + 1$$

$$\xrightarrow[\text{دارد}]{g^{-1}(x)} x = y^3 + 1 + \sqrt{y^3 + 1} \Rightarrow x = y^3 + 1 + \sqrt{y^3 + 1} + \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow x = \left(\sqrt{y^3 + 1} + \frac{1}{\varepsilon} \right)^2 - \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow x + \frac{1}{\varepsilon} = \left(\sqrt{y^3 + 1} + \frac{1}{\varepsilon} \right)^2 \Rightarrow \sqrt{x + \frac{1}{\varepsilon}} = \sqrt{y^3 + 1} + \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x + \frac{1}{\varepsilon}} - \frac{1}{\varepsilon} = \sqrt{y^3 + 1} \xrightarrow{\text{مربع}} x + \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} - \sqrt{x + \frac{1}{\varepsilon}} = y^3 + 1 \Rightarrow x + \frac{1}{\varepsilon} - \sqrt{x + \frac{1}{\varepsilon}} = y^3 + 1$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{\varepsilon} - \sqrt{x + \frac{1}{\varepsilon}} = y^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x - \frac{1}{\varepsilon} - \sqrt{x + \frac{1}{\varepsilon}}} \xrightarrow{x=12} g^{-1}(12) = \sqrt[3]{12 - \frac{1}{\varepsilon} - \sqrt{12 + \frac{1}{\varepsilon}}}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(12) = \sqrt[3]{12 - \frac{1}{\varepsilon} - \sqrt{\frac{\varepsilon 9}{\varepsilon}}} = \sqrt[3]{12 - \frac{1}{\varepsilon} - \frac{3}{\varepsilon}} = \sqrt[3]{12 - \varepsilon} = \sqrt[3]{12} = 2$$