

۱- (۲) $m=3$ ✓ به دلیل $n^2-n=2 \Rightarrow n^2-n-2=0 \Rightarrow (n-2)(n+1)=0$
 $n^2-n=2 \Rightarrow n^2-n-2=0 \Rightarrow (n-2)(n+1)=0$
 $\Rightarrow n = \begin{cases} -1 \Rightarrow (n, 5) = (-1, 5) \\ 2 \Rightarrow (n, 5) = (2, 5) \end{cases}$
 $\Rightarrow f = \{(3, 2), (2, 5), (-1, 4)\}$
 $n=2$ ✓

$m=2$ ✓ به دلیل $a=-1$ ✓
 $n=2$ ✓
 $\Rightarrow f = \{(-1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$

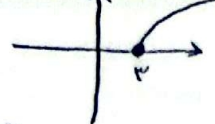
۲- تابع را رسم می کنیم و چون شیب مثبت است و خط باید پایین
 خط است پس کما مازیم به صورتی می تواند باشد که به ازای
 $x=2 \rightarrow y=2$ شود و چون ضابطه پایین مساوی یک ندارد
 پس توخالی می شود
 $a < 1$ ✓ $(-\infty, 1)$ ✓

۳- تابع را رسم می کنیم و ضابطه بالا ضابطه خطی است که بر آن $(2, \infty)$
 است و ضابطه پایین نیز یک خط است و اگر بخواهیم که تابع رو به رو
 یک به یک باشد شیب $a+1$ باید مثبت باشد (به ازای ضریب
 منفی غیر قابل قبول است) و همچنین پر دو تابع هم ضابطه اشتراکی
 با هم داشته باشند.
 $0 < a < 3$ ✓ $(0, 3)$ ✓
 این مساوی باشد دید
 یک به یک نیست!

۴- (۲) $x_1^3+2 = x_2^3+2 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$
 $x = y^3+2 \Rightarrow y^3 = x-2 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x-2}$ ✓
 رسم $y = x^2-4x+2$ $\xrightarrow{\text{تابع یک به یک نیست}}$ $\Rightarrow$ $\text{تابع یک به یک نیست}$
 خط به ازای هر x در $\mathbb{R}$ دارد $\Rightarrow$ $\text{تابع یک به یک نیست}$

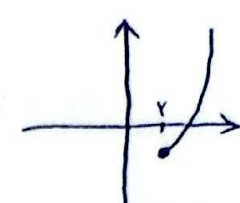
۵- (۲) $y = \frac{3x+1}{x-2}$ $\xrightarrow{\text{رسم کنیم}}$ $\Rightarrow$ $\text{تابع یک به یک نیست}$ ✓
 $x = \frac{y+1}{y-2} \Rightarrow xy-2x = y+1 \Rightarrow xy-2y = 2x+1 \Rightarrow y(x-2) = 2x+1$
 $\Rightarrow y = \frac{2x+1}{x-2}$
 $y = \frac{2x+1}{x-2} \xrightarrow{\text{ساده می شود}}$ $y = 2$ $\Rightarrow$ $\text{تابع یک به یک نیست}$ ✓

الف) $y = \sqrt{x-3}$ رسم
برای تشخیص یک به یک بودن

تابع یک به یک است $\Rightarrow$ 

۶- (۲)

تبدیل تابع
یک به یک $\Rightarrow x = \sqrt{y-3}$ توان $\Rightarrow x^2 = y-3 \Rightarrow y = x^2 + 3$ ✓

ب) $y = x^2 - 4x + 3$ $x \in [2, +\infty)$ $\Rightarrow x_{min} = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow$ یک
از سهی است $\Rightarrow$ 

$\Rightarrow$ بردار $= y = 2^2 - 4(2) + 3 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow R = [-1, +\infty)$
تبدیل تابع
یک به یک $\Rightarrow y = x^2 - 4x + 3 + 1 - 1 \Rightarrow y = x^2 - 4x + 4 - 1 \Rightarrow y = (x-2)^2 - 1$ ✓ تابع یک به یک است

$\Rightarrow x = (y+1)^2 - 1 \Rightarrow x+1 = (y+1)^2 \Rightarrow \sqrt{x+1} = y+1 \Rightarrow y = \sqrt{x+1} - 1$ ✓

چون تابع برای دامنه محدودیت نداشته پس بردار اول دامنه تابع دوم است. $\leftarrow$
 $y = \sqrt{x+1} - 1$ $x \in [-1, +\infty)$

$f(x) = x + \sqrt{x}$ $R_f = (0, +\infty) \Rightarrow D_f = (0, +\infty)$

۷- (۲)

تبدیل تابع
یک به یک $\Rightarrow x = y + \sqrt{y} \Rightarrow x = y + \sqrt{y} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \Rightarrow x = y + \sqrt{y} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \Rightarrow x = (\sqrt{y} + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4}$

$\Rightarrow x + \frac{1}{4} = (\sqrt{y} + \frac{1}{4})^2 \Rightarrow \sqrt{x + \frac{1}{4}} = \sqrt{y} + \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x + \frac{1}{4}} - \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{توان}} y = x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \sqrt{x + \frac{1}{4}}$

$\Rightarrow y = x + \frac{1}{4} - \sqrt{x + \frac{1}{4}} = ax + b - \sqrt{x-c} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{4} \\ c=-\frac{1}{4} \end{cases}$ خواسته سوال: $a+2b+4c = 1+1-1=1$ ✓

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}}$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-2}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-2}} \xrightarrow{\text{توان}} \frac{x_1^2}{x_1^2-2} = \frac{x_2^2}{x_2^2-2} \Rightarrow$

۸- (۲)

$x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 = x_2^2 x_1^2 - 2x_2^2 \Rightarrow 3x_1^2 = 3x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$ چون یک یونی تواند دو مختلاف
الگامت داشته باشند پس $\leftarrow x_1 = x_2$ پس یک تابع یک به یک است. ✓

تبدیل تابع
یک به یک $\Rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{y^2-2}} \xrightarrow{\text{توان}} x^2 = \frac{y^2}{y^2-2} \Rightarrow x^2 y^2 - 2x^2 = y^2 \Rightarrow x^2 y^2 - y^2 = 2x^2$
و در هم علامت هستند پس نیازی به $\pm$ نیست
 $\Rightarrow y^2(x^2-1) = 2x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{2x^2}{x^2-1} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{2x^2}{x^2-1}} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-1}}$ ✓

۹- راه دوم: $f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|} \Rightarrow D_{f^{-1}} = \mathbb{R}, R_{f^{-1}} = (-1, 1)$

دارون $\rightarrow x = \frac{y}{1+|y|} \Rightarrow x = \frac{y}{1+y}$ $\Rightarrow x(1+y) = y \Rightarrow x + xy = y \Rightarrow y = \frac{-x}{x-1} = \frac{x}{1-x}$
دارون $\rightarrow x = \frac{y}{1+|y|} \Rightarrow x = \frac{y}{1-y}$ $\Rightarrow x(1-y) = y \Rightarrow x - xy = y \Rightarrow y = \frac{-x}{-x-1} = \frac{x}{x+1}$

$\Rightarrow -2-2|y| = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2-2y = 0 & \text{غیرمنفی} \\ -2+2y = 0 & \text{منفی} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{x}{1-|x|}; |x| < 1 \Rightarrow f(\frac{2}{5}) = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}$ ✓
 $g(x) = \sqrt{x} - 1$ $D_g = [0, +\infty), R_g = [-1, +\infty)$

دارون $\rightarrow x = \sqrt{y} - 1 \Rightarrow x+1 = \sqrt{y} \Rightarrow y = (x+1)^2$ و $x \geq -1$
 $\Rightarrow y = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}} - 1$

$g(\frac{2}{3}) = (\frac{2}{3}+1)^2 = \frac{25}{9}$ خواسته سوال: $f(\frac{2}{5}) + g^{-1}(\frac{2}{5}) = \frac{2}{3} + \frac{25}{9} = \frac{31}{9}$ ✓
 $f(\frac{2}{5}) + g^{-1}(\frac{2}{5}) = \frac{2}{3} + \frac{25}{9} = \frac{31}{9}$ ✓

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} \quad g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)} \xrightarrow{*} g(x) = x^3 + 1 + \sqrt{x^3 + 1}$$

10

$$\xrightarrow[\text{دارد}]{f^{-1}(x)} x = \sqrt[3]{y-1} \Rightarrow x^3 = y-1 \Rightarrow y = x^3 + 1$$

$$\xrightarrow[\text{دارد}]{g(x)} g(x) \Rightarrow x = y^3 + 1 + \sqrt{y^3 + 1} \Rightarrow x = y^3 + 1 + \sqrt{y^3 + 1} + \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow x = \left(\sqrt{y^3 + 1} + \frac{1}{\varepsilon} \right)^2 - \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow x + \frac{1}{\varepsilon} = \left(\sqrt{y^3 + 1} + \frac{1}{\varepsilon} \right)^2 \Rightarrow \sqrt{x + \frac{1}{\varepsilon}} = \sqrt{y^3 + 1} + \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x + \frac{1}{\varepsilon}} - \frac{1}{\varepsilon} = \sqrt{y^3 + 1} \xrightarrow{\text{بجای} y} x + \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} - \sqrt{x + \frac{1}{\varepsilon}} = y^3 + 1 \Rightarrow x + \frac{1}{\varepsilon} - \sqrt{x + \frac{1}{\varepsilon}} = y^3 + 1$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{\varepsilon} - \sqrt{x + \frac{1}{\varepsilon}} = y^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x - \frac{1}{\varepsilon} - \sqrt{x + \frac{1}{\varepsilon}}} \xrightarrow{x=12} g^{-1}(12) = \sqrt[3]{12 - \frac{1}{\varepsilon} - \sqrt{12 + \frac{1}{\varepsilon}}}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(12) = \sqrt[3]{12 - \frac{1}{\varepsilon} - \sqrt{\frac{49}{\varepsilon}}} = \sqrt[3]{12 - \frac{1}{\varepsilon} - \frac{7}{\varepsilon}} = \sqrt[3]{12 - \varepsilon} = \sqrt[3]{12} = 2$$