

مقدار را به گونه ای تعیین کنید که روابط زیر تابع یک به یک باشند

جواب: $n = R - \{-1, 2\} \Rightarrow n = 2 \Rightarrow a + c = b$

الف) $F = \{(3, 2), (n, 5), (3, n^2 - n), (m, 2), (-1, 2)\} = m = 3, n^2 - n \neq 2$

ب) $F = \{(1, 1), (1, 6), (2, 3), (a, m), (a, n), (m, 3)\}$

تابع $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x > 1 \\ x + a & x < 1 \\ a & x = 0 \end{cases}$ یک به یک است خود a را به دست آورید

$a < 2 \Rightarrow a = (-\infty, 2)$

تابع $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x > 1 \\ ax + a - 1 & x \leq 0 \\ a - 1 & x = 0 \end{cases}$ یک به یک است خود a را به دست آورید

$a - 1 < 2 \Rightarrow a < 3$

$a = (-\infty, 3)$

یک به یک بودن توابع زیر را به روشی درخشان بررسی کنید و در صورت امکان ضابطه معکوس آن را به دست آورید

الف) $y = x^3 + 2$

ب) $y = x^2 - 4x + 2$

جواب: الف) $x = y^3 + 2 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x - 2}$

ب) $y = x^2 - 4x + 2$

یک به یک بودن توابع زیر را به روشی درخشان بررسی کنید و در صورت امکان ضابطه معکوس آن را به دست آورید

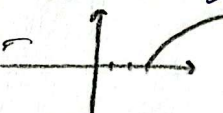
الف) $y = \frac{3x + 1}{x - 2}$

ب) $y = \frac{4 + 2x}{x + 2} \Rightarrow y = 2$

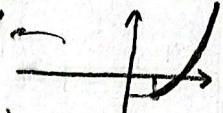
جواب: الف) $y = \frac{3x + 1}{x - 2} \Rightarrow y(x - 2) = 3x + 1 \Rightarrow yx - 2y = 3x + 1 \Rightarrow yx - 3x = 2y + 1 \Rightarrow x(y - 3) = 2y + 1 \Rightarrow x = \frac{2y + 1}{y - 3}$

ب) $y = \frac{4 + 2x}{x + 2} \Rightarrow y(x + 2) = 4 + 2x \Rightarrow yx + 2y = 4 + 2x \Rightarrow yx - 2x = 4 - 2y \Rightarrow x(y - 2) = 4 - 2y \Rightarrow x = \frac{4 - 2y}{y - 2} = 2$

یک به یک بودن توابع زیر را به روشی داخلی بررسی کنید و در صورت امکان ضابطه معکوس آن را بیابید.



کاهش دهنده است



افزایش دهنده است

الف) $y = \sqrt{x-3}$ $x = \sqrt{y-3} \Rightarrow x^2 = y-3$
 $y = x^2 + 3$ معکوس

ب) $y = x^3 - 4x + 3, x \in [2, +\infty)$
 $x^3 - 4x + 4 = (x-2)^3 - 1 \Rightarrow x = (y+2)^3 - 1$
 $x+1 = (y+2)^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x+1} + 2$ معکوس

وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ در بازه $(0, +\infty)$ به صورت $f^{-1}(x) = ax + b + \sqrt{cx + d}$ است حاصل $a + 2b + 4c$ را بیابید.

یک به یک بودن تابع $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}}$ را بررسی کنید و در صورت امکان ضابطه معکوس آن را بیابید.

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}} \Rightarrow y\sqrt{x^2-2} = x \Rightarrow y^2(x^2-2) = x^2 \Rightarrow y^2x^2 - 2y^2 = x^2 \Rightarrow x^2(y^2-1) = 2y^2$$

$$x^2 = \frac{2y^2}{y^2-1} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}y}{\sqrt{y^2-1}}$$

چون $x > \sqrt{2}$ پس $x = \frac{\sqrt{2}y}{\sqrt{y^2-1}}$

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}} \Rightarrow y = \frac{\frac{\sqrt{2}y}{\sqrt{y^2-1}}}{\sqrt{\frac{2y^2}{y^2-1} - 2}} = \frac{\sqrt{2}y}{\sqrt{y^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{y^2-1}}{\sqrt{2y^2 - 2(y^2-1)}} = \frac{\sqrt{2}y}{\sqrt{y^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{y^2-1}}{\sqrt{2}}$$

$$y = y \Rightarrow \text{تابع معکوس}$$

اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = \frac{x}{1+x}$ باشد حاصل $f(g^{-1}(\frac{1}{5})) + g^{-1}(\frac{1}{5})$ را بیابید.

$$g^{-1}(y) = \frac{y}{1-y} \Rightarrow g^{-1}(\frac{1}{5}) = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$

$$f(\frac{1}{4}) = \sqrt{\frac{1}{4}-1} = \sqrt{-\frac{3}{4}} \text{ (Not real)}$$

اصلاح: $f(x) = \sqrt{x+1}$

$$f(\frac{1}{4}) = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2\sqrt{5} + 1}{4}$$

اگر $F^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$ و $f(x) = F(x) + \sqrt{F(x)}$ باشد حاصل $g^{-1}(12)$ را بیابید.

$$F^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow x = y^3 + 1 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x-1} = F^{-1}(x)$$

$$f(x) = x^3 + 1 + \sqrt{x^3 + 1}$$

$$f(x) + \sqrt{f(x)} = 12 \Rightarrow x^3 + 1 + \sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{x^3 + 1 + \sqrt{x^3 + 1}} = 12$$

حدس $x=2$

$$2^3 + 1 + \sqrt{2^3 + 1} = 8 + 1 + \sqrt{9} = 9 + 3 = 12$$