

۱۳۲۵

پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ۱۵

نام و نام خانوادگی کلاس یازدهم ریاضی ۳

مقدار a را بیابید که تابع زیر تابع یک به یک باشد

جواب: $n^2 - n - 2 \neq 0 \Rightarrow n^2 - n - 2 = 0 \Rightarrow n = -1, 2$

الف) $F = \{(3, 2), (1, 5), (3, n^2 - n), (m, 2), (-1, 4)\} = m = 3, n^2 - n \neq 2$

ب) $F = \{(1, 1), (1, 6), (2, 3), (a, m), (a, n), (m, 3)\}$

$m = 2, a = -1, b = 2, c = 1$

تابع $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x > 1 \\ x + a & x \leq 1 \end{cases}$ یک به یک است خود a را بیابید

جواب: $a < 2 \Rightarrow a = (-\infty, 2)$

$1 + a \leq 2 \Rightarrow a \leq 1$

تابع $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x > 1 \\ ax + a - 1 & x \leq 0 \end{cases}$ یک به یک است خود a را بیابید

جواب: $a < 4$

نیسب $ax + a - 1$ صاف باشد $a > 0$

یک به یک بودن توابع زیر را بررسی و در صورت امکان ضابطه معکوس آن را بیابید

الف) $y = x^3 + 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y - 2}$

ب) $y = x^2 - 4x + 2$

یک به یک بودن توابع زیر را بررسی و در صورت امکان ضابطه معکوس آن را بیابید

الف) $y = \frac{3x + 1}{x - 2} \Rightarrow y = \frac{3x + 1}{x - 2} \Rightarrow y(x - 2) = 3x + 1 \Rightarrow yx - 2y = 3x + 1 \Rightarrow yx - 3x = 2y + 1 \Rightarrow x(y - 3) = 2y + 1 \Rightarrow x = \frac{2y + 1}{y - 3}$

ب) $y = \frac{4 + 2x}{x + 2} \Rightarrow y = \frac{4 + 2x}{x + 2} \Rightarrow y(x + 2) = 4 + 2x \Rightarrow yx + 2y = 4 + 2x \Rightarrow yx - 2x = 4 - 2y \Rightarrow x(y - 2) = 4 - 2y \Rightarrow x = \frac{4 - 2y}{y - 2}$

یک به یک بودن توابع زیر را به روشی داخلی
 یک به یک است $\checkmark$ $\frac{-b}{2a} = 2, -1$ 1, 1.5

یک به یک است $\checkmark$ $y = \sqrt{x-3}$ $x = \sqrt{y-3} \Rightarrow x^2 = y-3$
 $y = x^2 + 3$

ب) $y = x^2 - 4x + 3, x \in [2, +\infty)$
 $x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1 \Rightarrow x = (y+1)^2 - 1$
 $x+1 = (y+1)^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x+1} + 1$

وارون تابع $d(x) = x + \sqrt{x}$ در $(0, +\infty)$ به دست می آید $d^{-1}(x) = a + b\sqrt{x-c}$ است حاصل
 $a + 2b + c$ را به دست آوریم

$f(x) = x + \sqrt{x} = (\sqrt{x} + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \rightarrow f^{-1}(x) = (\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2})^2$

$f^{-1}(x) = x + \frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{1}{4}}$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow a + b + c = 1$

یک به یک بودن تابع $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}}$

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}} \Rightarrow \sqrt{x^2-2} = \frac{x}{y} \Rightarrow x^2 - 2 = \frac{x^2}{y^2} \Rightarrow x^2(1 - \frac{1}{y^2}) = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{2y^2}{y^2-1} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}y}{\sqrt{y^2-1}}$

$x = \frac{y}{\sqrt{y^2-2}} \Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{y^2-2} \Rightarrow x^2(y^2-2) = y^2 \Rightarrow x^2 y^2 - 2x^2 = y^2 \Rightarrow y^2(x^2-1) = 2x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{2x^2}{x^2-1} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-1}}$

اگر $f(x) = \frac{x}{1+x}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ باشد حاصل $f^{-1}(\frac{1}{5}) + g^{-1}(\frac{1}{5})$ را به دست آوریم

$\frac{1}{5} = \frac{x}{1+x} \Rightarrow 1+x = 5x \Rightarrow 1 = 4x \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{5} = \sqrt{x-1} \Rightarrow \frac{1}{25} = x-1 \Rightarrow x = \frac{26}{25}$

$f^{-1}(\frac{1}{5}) + g^{-1}(\frac{1}{5}) = \frac{1}{4} + \frac{26}{25} = \frac{25 + 104}{100} = \frac{129}{100}$

اگر $F(x) = \sqrt[3]{x-1}$ و $G(x) = F(x) + \sqrt{F(x)}$ باشد حاصل $G^{-1}(12)$ را به دست آوریم

$F^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow x = y^3 + 1 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x-1} = F(x)$

$F(x) + \sqrt{F(x)} = 12 \Rightarrow x^3 + 1 + \sqrt{x^3 + 1} = 12$

$(2)^3 + 1 + \sqrt{2^3 + 1} = 9 + 3 = 12$

$x = 2$