

$$f = \{(3, 2), (n, 5), (3, n^2 - n), (m, 2), (-1, 4)\}$$

برای اینکه وابسته تابع باشد: $(3, 2), (3, n^2 - n) \rightarrow n^2 - n = 2 \Rightarrow n^2 - n - 2 = 0 \Rightarrow (n-2)(n+1) = 0$

$$\Rightarrow n = 2 \text{ یا } n = -1$$

مقدار -1 برای غیر قابل قبول است و $n = 2$ این را

قابل یک به یک تبدیل می کند

$$(3, 2), (m, 2) \rightarrow m = 3$$

$$f = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (a, m-1), (a+2, n), (m, 3)\}$$

(1)

برای اینکه یک به یک باشد: $(2, 3), (m, 3) \rightarrow m = 2$

$(-1, 1), (a, 1) \rightarrow a = -1$ برای اینکه تابع باشد: $(1, 2), (1, n) \rightarrow n = 2$

$$f(n) = \begin{cases} 3n-1 & n \geq 1 \\ n+a & n < 1 \end{cases}$$

برای اینکه تابع یک به یک باشد؛ باید مطمئن شویم که
۱ در برد بخش اول $(n \geq 1)$ بزرگتر از برد بخش دوم $(n < 1)$
شود

برد بخش اول: برای $n \geq 1$ داریم $y = 3n-1$ که کمینه اش در $n=1$ برابر ۲ است؛
پس برد بخش اول: $[2, +\infty)$

(2)

برد بخش دوم: برای $n < 1$ داریم $y = n+a$ چون $n \rightarrow -\infty$ و $y \rightarrow -\infty$ و برای n
نزدیک ۱: $1+a < y$ پس برد برد بخش دوم: $(-\infty, 1+a)$

برای اینکه در برد اشتراکی نداشته باشد لازم است: $(-\infty, 1+a) \cap [2, +\infty) = \emptyset$

$$\Rightarrow 1+a \leq 2 \Rightarrow a \leq 1$$

$$a \leq 1 \leftarrow a$$

$$f(n) = \begin{cases} 3n-1 & n \geq 1 \\ n+a & n < 1 \end{cases}$$

برای اینکه تابع یک به یک باشد؛ باید

(۱) هر ششاهه دورش یک نواقص (افزایش یا کاهش) باشد

(۲) برد های این دو ششاهه با هم تداخل نداشته باشند

(3)

یکنواختی هر شانه و شانه اول ضرب a مثبت در نتیجه افزایش است پس در شانه دوم ضرب a هم باید مثبت باشد در نتیجه $a > 0$ (۱)

بررسی تداخل حازه ها :

$$f(n) \begin{cases} 3n-1 \xrightarrow{n \geq 1} 3n-1 > 2 \rightarrow [2, +\infty) \\ a+2n-1 \xrightarrow{n \leq 0} a+2n-1 \leq a-1 \rightarrow (-\infty, a-1] \end{cases}$$

(۳)

میان تداخل : $a-1 < 2 \rightarrow a < 3$ (۲)

جواب نهایی : $0 < a < 3$ (۱) (۲)

الف) $y = x^3 + 2$

تابع یک به یک است.

$$\begin{cases} y = x_1^3 + 2 \\ y = x_2^3 + 2 \end{cases} \rightarrow x_1^3 + 2 = x_2^3 + 2 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

عکس معکوس : $y = x^3 + 2 \xrightarrow{f^{-1}(n)} x = y^3 + 2 \Rightarrow y^3 = x - 2 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x-2}$

(۴)

ب) $y = x^2 - 6x + 2 \Rightarrow y = x^2 - 6x + 9 - 2 \Rightarrow y = (x-3)^2 - 2$

$$\begin{cases} y = (x_1-3)^2 - 2 \\ y = (x_2-3)^2 - 2 \end{cases} \rightarrow (x_1-3)^2 - 2 = (x_2-3)^2 - 2 \Rightarrow x_1-3 = \pm(x_2-3)$$

این تابع یک به یک نیست (زیاد متعلق به یک سهمی است) و تابع معکوس ندارد.

الف) $y = \frac{3x+1}{x-2}$

تابع همگرافیک یک به یک است پس معکوس پذیر است.

$$\rightarrow yx - 2y = 3x + 1 \Rightarrow yx - 3x = 1 + 2y \Rightarrow x(y-3) = 1 + 2y \Rightarrow x = \frac{1+2y}{y-3}$$

$$\Rightarrow f(n) = \frac{3n+1}{n-2} \rightarrow f^{-1}(n) = \frac{1+2n}{n-3}$$

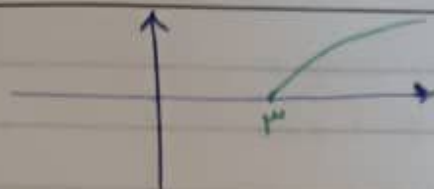
(۵)

ب) $y = \frac{4+2x}{x+2} \Rightarrow y = \frac{2(2+x)}{2+x} \Rightarrow y = 2$

یک به یک نیست و معکوس پذیر نیست.

من با مشر

$$الف) y = \sqrt{x-3}$$



یک به یک است

$$f^{-1}: x = \sqrt{y-3} \Rightarrow x^2 = y-3 \Rightarrow y = x^2+3 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2+3 \quad (x \geq 0)$$

9

$$ب) y = x^2 - 6x + 3, \quad x \in [2, +\infty)$$

مانده به دامنه داده شده یک به یک است

$$\Rightarrow y = x^2 - 6x + 3 \Rightarrow y = (x-3)^2 - 6 \Rightarrow x-3 = \pm \sqrt{y+6}$$

$$\Rightarrow x = 3 \pm \sqrt{y+6} \Rightarrow f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x+6}$$

علامت منفی غیر قابل قبول است چون دامنه قابع اولیه $[2, +\infty)$ بوده و بر د تابع معکوس نیز باید از 2 بیشتر باشد.

$$t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x$$

$$f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow y = t^2 + t \Rightarrow t^2 + t - y = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4y}}{2}$$

$$\Rightarrow t = \frac{-1 + \sqrt{1+4y}}{2} \Rightarrow x = t^2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{1+4y}}{2} \right)^2$$

7

$$f^{-1}(x) = \frac{1+2x - \sqrt{1+4x}}{2} = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4x} = x + \frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{1}{4}}$$

$$ax+b-\sqrt{x-c}$$

$$\Rightarrow a=1, \quad b=\frac{1}{2}, \quad c=-\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{a+2b+4c = 1+1-1=1}$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-2}} \\ y = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-2}} \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-2}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-2}}$$

8

$$\Rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2-2} = \frac{x_2^2}{x_2^2-2} \Rightarrow x_1^2(x_2^2-2) = x_2^2(x_1^2-2) \Rightarrow x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 = x_1^2 x_2^2 - 2x_2^2$$

$$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

مقدار منفی برای x_2 غیر قابل قبول است

زیرا ما عبارت را به توان دو رسانیم و در نتیجه این کار این مقدار را به دست می دهیم و نتیجه می گیریم

که تابع یک به یک است

$$f^{-1}(y) : x = \frac{y}{\sqrt{y^2 - r^2}} \Rightarrow x \sqrt{y^2 - r^2} = y \Rightarrow x^2 (y^2 - r^2) = y^2$$

$$\Rightarrow x^2 y^2 - r^2 x^2 = y^2 \Rightarrow y^2 - x^2 y^2 = -r^2 x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{-r^2 x^2}{1 - x^2}$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{r^2 x^2}{x^2 - 1} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{r^2 x^2}{x^2 - 1}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \pm \sqrt{\frac{r^2 x^2}{x^2 - 1}} \quad \text{ضابطه تابع معکوس}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad , \quad g(x) = \sqrt{x} - 1$$

$$\Rightarrow f(x) : y = \frac{f^{-1}(x)}{1+|x|} \Rightarrow x = \frac{f(x)}{1+|y|} \quad x = \frac{-r}{\omega} \rightarrow \frac{-r}{\omega} = \frac{y}{1+|y|}$$

$$\Rightarrow -r - r|y| = \omega y \Rightarrow \omega y + r|y| + r = 0 \Rightarrow \begin{cases} \forall y + r = 0 \Rightarrow y = \frac{-r}{\omega} \quad \times y > 0 \\ \forall y + r = 0 \Rightarrow y = \frac{-r}{\omega} \quad \checkmark y < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{-r}{\omega}\right) = \frac{-r}{\omega}$$

$$g^{-1}(x) : y = \sqrt{x} - 1 \Rightarrow x = \sqrt{y} - 1 \quad x = \frac{-r}{\omega} \rightarrow \frac{-r}{\omega} = \sqrt{y} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{r}{\omega} = \sqrt{y} \Rightarrow y = \frac{r^2}{\omega^2} \Rightarrow g^{-1}\left(\frac{-r}{\omega}\right) = \frac{r}{\omega}$$

$$f\left(\frac{-r}{\omega}\right) + g^{-1}\left(\frac{-r}{\omega}\right) \Rightarrow \frac{-r}{\omega} + \frac{r}{\omega} = \frac{-\omega + r\omega}{\omega} = \frac{-r^2}{\omega}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{-r}{\omega}\right) + g^{-1}\left(\frac{-r}{\omega}\right) = \frac{-r^2}{\omega}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} \quad , \quad g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)}$$

$$f(x) : y = \sqrt{x-1} \Rightarrow x = \sqrt{y+1} \Rightarrow x^2 = y+1 \Rightarrow y = x^2 - 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - 1$$

$$\Rightarrow g(x) = x^2 - 1 + \sqrt{x^2 - 1} \quad x = a, y = 12 \quad \boxed{g^{-1}(12) \rightarrow g(a) = 12}$$

$$\Rightarrow a^2 + \sqrt{a^2 - 1} = 12 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow g(2) = 12 \Rightarrow g^{-1}(12) = 2$$