

$$f = \{(3, 2), (n, 5), (3, n^2 - n), (m, 2), (-1, 4)\}$$

برای اینکه وابسته تابع باشد: $(3, 2) \cdot (3, n^2 - n) \rightarrow n^2 - n = 2 \Rightarrow n^2 - n - 2 = 0 \Rightarrow (n - 2)(n + 1) = 0$

$$\Rightarrow n = 2 \text{ یا } n = -1$$

مقدار ۱- برای غیر قابل قبول است و $n = 2$ این را

قابل یک به یک تبدیل می کند

$$(3, 2) \cdot (m, 2) \rightarrow m = 3$$

$$f = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (a, m-1), (a+2, n), (m, 3)\}$$

برای اینکه یک به یک باشد: $(2, 3) \cdot (m, 3) \rightarrow m = 2$

$(-1, 1) \cdot (a, 1) \rightarrow a = -1$ $(1, 2) \cdot (1, n) \rightarrow n = 2$

$$f(n) = \begin{cases} 3n-1 & n \geq 1 \\ n+a & n < 1 \end{cases}$$

برای اینکه تابع یک به یک باشد؛ باید مطمئن شویم که
۱- در برد بخش اول $(n \geq 1)$ بزرگترین برد بخش دوم $(n < 1)$
نشود

بر برد بخش اول: برای $n \geq 1$ داریم $y = 3n - 1$ که کمینه اش در $n = 1$ برابر ۲ است؛

پس برد بخش اول: $[2, +\infty)$

بر برد بخش دوم: برای $n < 1$ داریم $y = n + a$ چون $n \rightarrow -\infty$ و $y \rightarrow -\infty$ و برای n

نزدیک ۱: $1 + a < y$ پس بزرگترین برد بخش دوم: $(-\infty, 1 + a)$

برای اینکه در برد اشتراکی نداشته باشد لازم است: $(-\infty, 1 + a) \cap [2, +\infty) = \emptyset$

$$\Rightarrow 1 + a \leq 2 \Rightarrow a \leq 1$$

$$a \leq 1 \leftarrow a$$

$$f(n) = \begin{cases} 3n-1 & n \geq 1 \\ n+a & n < 1 \end{cases}$$

برای اینکه تابع یک به یک باشد؛ باید

۱- در ششانه خروجی یکناخت (افزایشی یا کاهش) باشد

۲- برد های این دو ششانه با هم تداخل نداشته باشند

۲

۳

یکنواختی هر شانه و شانه اول ضرب a مثبت در نتیجه افزایش است پس در شانه دوم ضرب a هم باید مثبت باشد در نتیجه $a > 0$ (۱)

بررسی تداخل حازه ها :

$$f(a) \begin{cases} a \geq 1 \rightarrow a-1 > 2 \rightarrow [2, +\infty) \\ a < 0 \rightarrow a+1 \leq a-1 \rightarrow (-\infty, a-1] \end{cases}$$

(۳)

۲) $a-1 < 2 \rightarrow a < 3$: همان تداخل

۱) $\cap$ ۲) : $0 < a < 3$ ✓ جواب نهایی :

الف) $y = x^3 + 2$

تابع یک به یک است ✓

$$\begin{cases} y = x_1^3 + 2 \\ y = x_2^3 + 2 \end{cases} \rightarrow x_1^3 + 2 = x_2^3 + 2 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

عکس معکوس : $y = x^3 + 2 \xrightarrow{f^{-1}(y)} x = y^3 + 2 \Rightarrow y^3 = x - 2 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x-2}$ ✓

ب) $y = x^2 - 6x + 2 \Rightarrow y = x^2 - 6x + 9 - 2 \Rightarrow y = (x-3)^2 - 2$ (۴)

$$\begin{cases} y = (x_1-3)^2 - 2 \\ y = (x_2-3)^2 - 2 \end{cases} \rightarrow (x_1-3)^2 - 2 = (x_2-3)^2 - 2 \Rightarrow x_1-3 = \pm(x_2-3)$$

این تابع یک به یک نیست (زیاد متعلق به یک سهمی است) و تابع معکوس ندارد ✓

الف) $y = \frac{3x+1}{x-2}$

تابع همگرافیک یک به یک است پس معکوس یونیک است. ✓

$$\rightarrow yx - 2y = 3x + 1 \Rightarrow yx - 3x = 1 + 2y \Rightarrow x(y-3) = 1 + 2y \Rightarrow x = \frac{1+2y}{y-3}$$

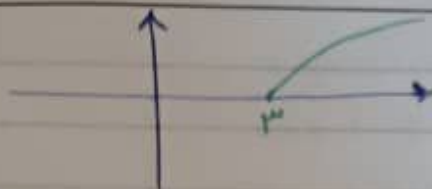
$$\Rightarrow f(a) = \frac{3a+1}{a-2} \rightarrow f^{-1}(a) = \frac{1+2a}{a-3}$$
 ✓

(۵)

ب) $y = \frac{4+2x}{x+2} \Rightarrow y = \frac{2(2+x)}{2+x} \Rightarrow y = 2$

یک به یک نیست و معکوس پذیر نیست ✓
 من با مشتق

$$\text{الف) } y = \sqrt{x-3}$$



یک به یک است ✓

$$f^{-1} \text{ معکوس: } x = \sqrt{y-3} \Rightarrow x^2 = y-3 \Rightarrow y = x^2+3 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2+3 \quad (x \geq 0) \quad \checkmark$$

$$\text{ب) } y = x^2 - 4x + 3, \quad x \in [2, +\infty)$$

مانده به دامنه داده شده یک به یک است ✓

$$\Rightarrow y = x^2 - 4x + 4 - 1 \Rightarrow y = (x-2)^2 - 1 \Rightarrow x-2 = \pm \sqrt{y+1}$$

$$\Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{y+1} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+1} \quad \checkmark$$

علامت منفی غیر قابل قبول است چون دامنه قایع اولیه $[2, +\infty)$ بوده و بر د تابع معکوس نیز باید از ۲ بیشتر باشد.

$$t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x$$

$$f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow y = t^2 + t \Rightarrow t^2 + t - y = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4y}}{2}$$

$$\Rightarrow t = \frac{-1 + \sqrt{1+4y}}{2} \Rightarrow x = t^2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{1+4y}}{2} \right)^2$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1+2x - \sqrt{1+4x}}{2} = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4x} = x + \frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow a=1, \quad b=\frac{1}{2}, \quad c=-\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{a+2b+4c = 1+1-1=1} \quad \checkmark$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-2}} \\ y = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-2}} \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-2}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-2}}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2-2} = \frac{x_2^2}{x_2^2-2} \Rightarrow x_1^2(x_2^2-2) = x_2^2(x_1^2-2) \Rightarrow x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 = x_1^2 x_2^2 - 2x_2^2$$

$$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

مقدار منفی برای x_2 غیر قابل قبول است

زیرا ما عبارت را به توان دو رسانیم و در نتیجه این کار این مقدار را ایجاد کرده و نتیجه من نمیست

که تابع یک به یک است ✓

$$f^{-1}(y) : x = \frac{y}{\sqrt{y^2 - r^2}} \Rightarrow x \sqrt{y^2 - r^2} = y \Rightarrow x^2 (y^2 - r^2) = y^2$$

$$\Rightarrow x^2 y^2 - r^2 x^2 = y^2 \Rightarrow y^2 - x^2 y^2 = -r^2 x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{-r^2 x^2}{1 - x^2}$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{r^2 x^2}{x^2 - 1} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{r^2 x^2}{x^2 - 1}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \pm \sqrt{\frac{r^2 x^2}{x^2 - 1}} \quad \text{ضابطه تابع معکوس}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad , \quad g(x) = \sqrt{x} - 1$$

$$\Rightarrow f(x) : y = \frac{f^{-1}(x)}{1+|x|} \Rightarrow x = \frac{f(x)}{1+|y|} \quad x = \frac{-r}{\omega} \rightarrow \frac{-r}{\omega} = \frac{y}{1+|y|}$$

$$\Rightarrow -r - r|y| = \omega y \Rightarrow \omega y + r|y| + r = 0 \Rightarrow \begin{cases} \forall y + r = 0 \Rightarrow y = \frac{-r}{\omega} \quad y > 0 \\ 3y + r = 0 \Rightarrow y = \frac{-r}{3} \quad y < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{-r}{\omega}\right) = \frac{-r}{3} \quad \checkmark$$

$$g^{-1}(x) : y = \sqrt{x} - 1 \Rightarrow x = \sqrt{y} - 1 \quad x = \frac{-r}{\omega} \rightarrow \frac{-r}{\omega} = \sqrt{y} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{r}{\omega} = \sqrt{y} \Rightarrow y = \frac{r^2}{\omega^2} \Rightarrow g^{-1}\left(\frac{-r}{\omega}\right) = \frac{r}{\omega} \quad \checkmark$$

$$f\left(\frac{-r}{\omega}\right) + g^{-1}\left(\frac{-r}{\omega}\right) \Rightarrow \frac{-r}{3} + \frac{r}{\omega} = \frac{-\omega + 3r}{3\omega} = \frac{-r^2}{3\omega}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{-r}{\omega}\right) + g^{-1}\left(\frac{-r}{\omega}\right) = \frac{-r^2}{3\omega} \quad \checkmark$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} \quad , \quad g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)}$$

$$f(x) : y = \sqrt{x-1} \Rightarrow x = \sqrt{y+1} \Rightarrow x^2 = y+1 \Rightarrow y = x^2 - 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - 1$$

$$\Rightarrow g(x) = x^2 - 1 + \sqrt{x^2 - 1} \quad x = a, y = 12 \quad \boxed{g^{-1}(12) \rightarrow g(a) = 12}$$

$$\Rightarrow a^2 + \sqrt{a^2 - 1} = 11 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow g(2) = 12 \Rightarrow g^{-1}(12) = 2 \quad \checkmark$$