

(۲, ۱)

$$S = \{(3, 2), (n, 1), (n^2 - n, 2), (n, 2), (-1, 1)\}$$

$$2 \leq n^2 - n \Rightarrow 2 \leq n(n-1) \Rightarrow \begin{cases} n \geq 2 \\ n-1 \geq 1 \end{cases}$$

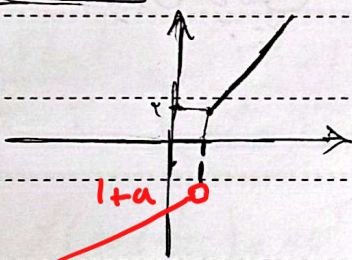
$$n \geq 2$$

(۲)

$$S = \{(-1, 1), (1, 2), (2, 3), (a, m-1), (a+2, n), (n, 3)\}$$

$$\begin{cases} m \geq 2 \\ a \geq -1 \\ n \geq 2 \end{cases}$$

$$(a, 1) \quad (-1+2, n) \Rightarrow (1, n)$$



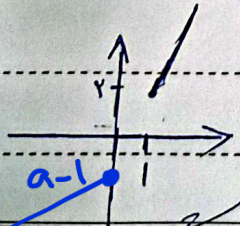
$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \geq 1 \\ x+a & x < 1 \end{cases}$$

۱) حرکت از بالا به پایین در دامنه می شود یک به یک باشند
۲) اشتراک بردها تهی باشند

$$k+a < 2 \Rightarrow a \leq 1$$

$$a \in (-\infty, 2) \Rightarrow a = (-\infty, 1]$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \geq 1 \\ x+a-1 & x < 1 \end{cases}$$



$$a \in (0, +\infty)$$

$$0 < a-1 = a-1 \Rightarrow 0 < a \Rightarrow a \in (0, +\infty)$$

$$a-1 < 2 \Rightarrow a < 3 \Rightarrow a \in (0, 3)$$

④ یک به یک بدون توابع را بررسی کن و اگر بدون معکوس کن.

الف) $y = x^3 + 2$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} y_1 = x_1^3 + 2 \\ y_2 = x_2^3 + 2 \end{cases} \Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow x_1^3 + 2 = x_2^3 + 2$

$\Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2} \Rightarrow$ یک به یک! ✓

① $x^3 = y - 2$ $\Rightarrow$ $x = \sqrt[3]{y-2} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$ ✓

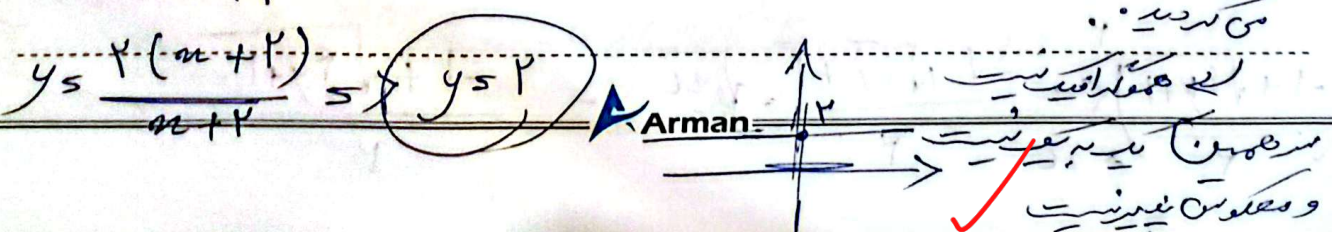
توابع درجه ۲ همیشه معکوس ندارند! $\Rightarrow$ $y = x^2 - (x+2)$ (ب) یک به یک نیست! ✓

⑤ یک به یک بدون وجود آسان ضابطه معکوس! $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $\Rightarrow$ $ad \neq bc$ $\Rightarrow$ $y = \frac{a}{c}$ همواره آفب یک به یک! شکلش! ✓

الف) $y = \frac{x^3 + 1}{x - 3}$ $\Rightarrow$ $x = \frac{y+1}{y-3}$ ✓

$y = \frac{2x+1}{x-3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ ✓

ب) $y = \frac{2x+5}{x+2}$ $2 \times 2 = 4$ این گفته است که حتماً باید به این دقت $2 \times 2 = 4$ $\Rightarrow$ $y = \frac{2x+5}{x+2}$ $\Rightarrow$ $y = 2$ $\Rightarrow$ $2x+5 = 2(x+2) \Rightarrow 2x+5 = 2x+4 \Rightarrow 5 = 4$ $\Rightarrow$ مستحيل!



$$y = \sqrt{x-3} \quad (f)$$

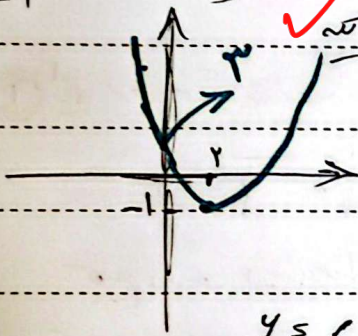
ب) یک به یک بودن و جبهه یک به یک

$$x = \sqrt{y-3} \Rightarrow y-3 = u^2 \Rightarrow y = u^2 + 3 \rightarrow f^{-1}(u) = u^2 + 3$$

$$u > 0$$

عقب از یک منظم که یک به یک است $u \in [2, +\infty)$ و $y = u^2 + 3$

$$\leftarrow \text{از محور تقارن که از روی } \frac{-b}{2a} \text{ در می آید.} \quad (2) = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1-4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$



$$y = u^2 - 4u + 3 + 1 - 1 \Rightarrow y = u^2 - 4u + 3 - 1$$

$$y = (u-2)^2 - 1 \Rightarrow u-2 = \pm \sqrt{y+1} \Rightarrow u = 2 \pm \sqrt{y+1}$$

* بدین علامت منفی غیر قابل قبول است $f^{-1}(u) = 2 + \sqrt{u+1}$

دامنه تابع اول $[2, +\infty)$ است و برد تابع معکوس نیز باید از ۲ بیشتر

(۷) وارون تابع $f(u) = u + \sqrt{u}$ در بازه $(0, +\infty)$ به صورت

جواب:

$f^{-1}(u) = au + b + \sqrt{u-c}$ است. حاصل $a+2b+c$ را بدست بیاور

$$\sqrt{u} + u = y \Rightarrow \begin{cases} t^2 = u \\ t = \sqrt{u} \end{cases} \rightarrow t^2 + t = y \rightarrow t^2 + t - y = 0$$

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{1+4y}}{2} \right)^2 = u \quad \left(\frac{-1 + \sqrt{1+4y}}{2} \right) = \sqrt{u} \quad \left(\frac{-1 + \sqrt{1+4y}}{2} \right) = t$$

$$f^{-1}(y) = -\frac{1}{y}\sqrt{4y+1} + \frac{1}{y} + y \Rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y+\frac{1}{4}} + \frac{1}{y} + y$$

$$\Rightarrow f^{-1}(u) = \sqrt{u+\frac{1}{4}} + \frac{1}{y} + u \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{4} \\ c = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow 1 + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{4}\right) = 2$$

نکته: در اینجا باید دقت کرد که $u = y$ است.

$$f(u_1) = f(u_2)$$

اگر از این نتیجه بگیریم در میابیم.

$$\left(\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2-2}}\right) = \left(\frac{u_2}{\sqrt{u_2^2-2}}\right) \Rightarrow \frac{u_1^2}{u_1^2-2} = \frac{u_2^2}{u_2^2-2} \Rightarrow u_1^2 u_2^2 - 2u_1^2 = u_1^2 u_2^2 - 2u_2^2$$

$$\Rightarrow u_1^2 u_2^2 - 2u_1^2 = u_1^2 u_2^2 - 2u_2^2 \Rightarrow u_1^2 = u_2^2$$

$$u_1 = \pm u_2$$

پس این است که به چه چیزی گفته اند الان می بینیم که $u_1 = \pm u_2$ اما ۱۰۰٪ در استیجاری ولی حقیقت اینست که u با u_1 و u_2 در دو مختلف علامت داشته باشند اینی به خاطر اینست که u و u_1 و u_2 سه عدد در واقع $u_1 = u$ پس تابع یک به یک است.

$$y = \frac{u}{\sqrt{u^2-2}} \Rightarrow u = \frac{y}{\sqrt{y^2-2}} \Rightarrow u^2 = \frac{y^2}{y^2-2}$$

$$= y^2 u^2 - 2u^2 = y^2 \Rightarrow y^2 u^2 - y^2 = 2u^2 \Rightarrow y^2 (u^2 - 1) = 2u^2$$

$$y^2 = \frac{2u^2}{u^2-1} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{2u^2}{u^2-1}} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}u}{\sqrt{u^2-1}}$$

u و y هم علامت دارند پس u و y علامت $\pm$ دارند.

④ اگر $f(u) = \frac{u}{1+u}$ و $g(u) = \sqrt{u}-1$ باشد، $f^{-1}(-\frac{2}{5}) + g^{-1}(-\frac{2}{5})$ را بیابید.

۲

برای اول معلوم است: $\frac{u}{1+u} = y \Rightarrow u = y(1+u) \Rightarrow u = y + yu \Rightarrow u - yu = y \Rightarrow u(1-y) = y \Rightarrow u = \frac{y}{1-y}$

دامنه u در این حالت برابر با $[0, 1)$ است. $y \in [0, 1)$

برای این $y = \frac{u}{1+u} \Rightarrow u = y(1+u) \Rightarrow u = y + yu \Rightarrow u - yu = y \Rightarrow u(1-y) = y \Rightarrow u = \frac{y}{1-y}$

اگر $u > 0$ باشد، $u = y - yu \Rightarrow yu + u = y \Rightarrow u(y+1) = y \Rightarrow u = \frac{y}{y+1}$

دامنه u در این حالت $u > 0$ است. $y \in (-\infty, 0)$

$-\frac{2}{5}$ از صفر کمتر است. $f(-\frac{2}{5}) = \frac{-\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{-\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{2}{3}$ ✓

$g^{-1}(-\frac{2}{5}) = \frac{9}{25}$

$(-\frac{2}{5} + 1)^2 = (\frac{3}{5})^2 = \frac{9}{25}$ ✓ $\sqrt{u} = y + 1 \Rightarrow u = (y+1)^2$

$(1+y)^2 = g^{-1}(u)$

$-\frac{2}{3} + \frac{9}{25} = \frac{-50 + 27}{75} = -\frac{23}{75}$ ✓

$$g^{-1}(12) \text{ چه؟} \quad g(u) = f(u) + \sqrt{f(u)} \quad f^{-1}(u) = \sqrt[3]{u-1} \quad (10)$$

$$f(u) = t \Rightarrow \sqrt{t+6} = g(u) \Rightarrow g(u) = 12 \quad (2)$$

$$12 = t + \sqrt{t} \Rightarrow s^2 + s - 12 = 0$$

فرض می کنیم

$$s^2 = t$$

$$s = \frac{-1 \pm \sqrt{49+1}}{2}$$

$$-6$$

$$3$$

چون $0 < \sqrt{t} = s$ جواب معتبر: $s = 3$

$$t = s^2 = 9$$

حالاتی داریم $t \geq 9$ بوده و چون $f^{-1}(u) = \sqrt[3]{u-1}$

$$f^{-1}(9) = \sqrt[3]{9-1} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$g^{-1}(12) = 2$$

۱۱:۵۰

با عذرخواهی می خواهم بگویم به خاطر دیر وقت بودن آن و هم تذکر آن به خط بودن آن و آخرت بودن آن است. لا اله الا الله

پسینم و تقدیر کنیم

خسته باشید