۱۹٫۵

تکلیف   شهاب محقق کلاس دوشنبه‌ها

سوال ۱)

$\log_{n}^{m} = a$ $\log_{mn}^{m^۲n} = b$ $\log_{mn}^{mn\times n} = b \Rightarrow 1 + \log_{mn}^{n} = b$ ②

$1 + \frac{1}{\log_{n}^{mn}} = b \Rightarrow 1 + \frac{1}{1+\log_{n}^{m}} = b \Longrightarrow 1 + \frac{1}{1+a} = b \Rightarrow \frac{۲a+1}{a+1} = b$

$\underbrace{\frac{a+1}{a+1}}_{1} < b < \underbrace{\frac{۲a+۲}{a+1}}_{۲} \Rightarrow 1 < b < ۲ \Rightarrow [b] = 1$ ✓

سوال ۲) ②

الف) $y = \sqrt{\frac{x}{\log_{\frac{1}{۲}}^{x}}}$ $\log_{\frac{1}{۲}}^{x} = 0 \Rightarrow x = (\frac{1}{۲})^0 = 1$

x		0		1	
y	$-$	ϕ	$+$	ϕ	$-$

I

چون $\log_{\frac{1}{۲}}^{x}$ نزدیکی سمت چپ در راست ریشه منفی می‌شود.

$\log_{\frac{1}{۲}}^{x} \to x > 0$ II

$\xrightarrow{I \cap II} 0 < x < 1 \Rightarrow D_f = (0,1)$ ✓

ب) $y = \frac{\log_{۴}^{(x^۲-x-۲)}}{\sqrt{x^۲-1}+1} \to$ مخرج همواره مثبت هیچ‌گاه صفر نمی‌شود

$\log_{۴}^{(x^۲-x-۲)} \to x^۲-x-۲ > 0$

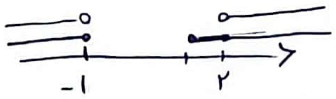
$(x-۲)(x+1) > 0$

x		-1		۲	
y	$+$		$-$		$+$

I

$(-\infty,-1) \cup (۲,+\infty)$

$\sqrt{x^۲-1} \to x^۲ \geq 1 \to \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases}$ II

$\xrightarrow{I \text{ و } II}$  $D_f = (-\infty,-1) \cup (۲,+\infty)$ ✓

سوال ۳) ②

$۲\log_{x}^{a} + \log_{a}^{\sqrt{x}} = ۲$ $\log_{x}^{a^۲} + \frac{1}{۲}\log_{a}^{x} = ۲ \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$ I

$\log_{x}^{a^۲} + \log_{a^۲}^{x} = ۲ \Rightarrow \log_{x}^{a^۲} + \frac{1}{\log_{x}^{a^۲}} = ۲ \xrightarrow{\log_{x}^{a^۲} = t} t + \frac{1}{t} = ۲$

$t^۲ - ۲t + 1 = 0 \to (t-1)^۲ = 0 \to t = 1$ $\log_{x}^{a^۲} = 1 \xRightarrow{x=9} \log_{9}^{a^۲} = 1$

$a^۲ = 9 \overset{I}{\Rightarrow} \begin{cases} a = ۳ \text{ ق ق} \\ a = -۳ \text{ غ ق} \end{cases}$ ✓

سوال ۴) ②

$\log^{۲} \simeq ۰/۳$ $\log^{۳} \simeq ۰/۴$ $(\log^{\frac{۵}{۳}})x^{۲} + (\log^{۹})x - \underbrace{\log ۱۵}_{\log^{۳\times۵}} = ۰$

$۱ - \log^{۲} = \log^{۵} \rightarrow \log^{۵} = ۱ - ۰/۳ = ۰/۷$

$(\log^{۵} - \log^{۳})x^{۲} + (۲\log^{۳})x - (\log^{۳} + \log^{۵}) = ۰$

$(۰/۷ - ۰/۴)x^{۲} + (۲\times۰/۴)x - (۰/۴ + ۰/۷) = ۰$ $۰/۳x^{۲} + ۰/۸x - ۱/۱ = ۰$

$۳x^{۲} + ۸x - ۱۱ = ۰ \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{۶۴ + ۱۳۲}}{۳} = \frac{۱۴}{۳}$ ✓

سوال ۵) ②

$\log_{۲}^{۵} = ۲$

$\log_{۲}^{۷} = ۲/۸$ $\log_{۵}^{۲} = ۰/۵$ $\log_{۱۴}^{۱۰} = ?$ $\log_{۵}^{۷} = \frac{\log_{۲}^{۷}}{\log_{۲}^{۵}} = \frac{۲/۸}{۲} = \underline{\underline{۱/۴}}$

$\log_{۱۴}^{۵\times۲} = \log_{۱۴}^{۵} + \log_{۱۴}^{۲} = \frac{۱}{\log_{۵}^{۱۴}} + \frac{۱}{\log_{۲}^{۱۴}} = \frac{۱}{\log_{۵}^{۷} + \log_{۵}^{۲}} + \frac{۱}{۱ + \log_{۲}^{۷}}$

$= \frac{۱}{۱/۴ + ۰/۵} + \frac{۱}{۱ + ۲/۸} = \frac{۱}{۱/۹} + \frac{۱}{۳/۸} = \frac{۲ + ۱}{۳/۸} = \frac{۳}{۳/۸} = \frac{۳۰}{۳۸} = \frac{۱۵}{۱۹}$ ✓

سوال ۶) ②

$\log_{۳}^{۲} = \frac{۱}{۱/۶}$

$\log_{۳}^{۵} = ۱/۵$ $\log_{۲}^{۳} = ۱/۶$ $\log_{۱۵}^{۶} = ?$ $\log_{۲}^{۵} = \frac{\log_{۳}^{۵}}{\log_{۳}^{۲}} = \frac{۱/۵}{\frac{۱}{۱/۶}} = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$

$\log_{۱۵}^{۳\times۲} = \log_{۱۵}^{۳} + \log_{۱۵}^{۲} = \frac{۱}{۱ + \log_{۳}^{۵}} + \frac{۱}{\log_{۲}^{۵} + \log_{۲}^{۳}} = \frac{۱}{۱ + ۱/۵} + \frac{۱}{۲/۴ + ۱/۶}$

$\frac{۱}{۲/۵} + \frac{۱}{۴} = \frac{۴ + ۲/۵}{۱۰} = \frac{۶/۵}{۱۰} = ۰/۶۵$ ✓

سوال ۷) ②

$\log_{۸}^{۱۸} = m$ $\log_{۴}^{۱۲}$ $\frac{۱}{۳}\log_{۲}^{۱۸} = \frac{۱}{۳}(\log_{۲}^{۲\times۳^{۲}}) = \frac{۱}{۳}(۱ + ۲\log_{۲}^{۳}) = m$

$\Rightarrow \frac{۳m - ۱}{۲} = \log_{۲}^{۳}$, $\log_{۴}^{۱۲} = \frac{۱}{۲}\log_{۲}^{۱۲} = \frac{۱}{۲}(۲ + \log_{۲}^{۳})$

$\frac{۱}{۲}\left(\frac{۳m - ۱ + ۴}{۲}\right) = \frac{۳m + ۳}{۴} = \frac{۳}{۴}(m + ۱)$ ✓

سوال ۸) (۲)

$(۰/۴)^{۲x-۱} = (\frac{۱۲۵}{۸})^{x^۲} \qquad (\frac{۲}{۵})^{۲x-۱} = (\frac{۵}{۲})^{۳x^۲}$

$(\frac{۵}{۲})^{-۲x+۱} = (\frac{۵}{۲})^{۳x^۲} \Rightarrow ۳x^۲+۲x-۱=۰ \xrightarrow{\text{روش}} (x+۳)(x-۱) \begin{cases} x_۱=\frac{-۳}{۳}=-۱ & \text{غ ق ق} \\ x_۲=\frac{۱}{۳} & \text{ق ق} \end{cases}$

$\log_{۸}^{۹x+۱} \Rightarrow ۹x+۱>۰ \quad x>-\frac{۱}{۹} \qquad \log_{۸}^{\frac{۹}{۳}+۱} = \log_{۸}^{۴} = \frac{۲}{۳}\log_{۲}^{۲} = \boxed{\frac{۲}{۳}}$ ✓

سوال ۹) (۲)

$\log_{۲}^{۳}=a \qquad \log_{۸}^{b} = \frac{۲}{۳}(۱+a) \qquad \log^{۳b-۸} = ?$

$\log_{۸}^{b} = \frac{۲}{۳}(۱+\log_{۲}^{۳}) \Rightarrow \frac{۱}{۳}\log_{۲}^{b} = \frac{۲}{۳}\log_{۲}^{۶} \Rightarrow \log_{۲}^{b} = \log_{۲}^{۳۶}$

$b=۳۶$

$\log_{۱۰}^{۳(۳۶)-۸} = \log_{۱۰}^{۱۰۰} = \boxed{۲}$ ✓

سوال ۱۰) (۱,۵)

$-۴ax^۲+bx+\frac{۱}{۲}c=۰ \qquad \frac{۱}{\alpha+\beta} = \log^{۴} \qquad a=\frac{b+c}{۲}\ I$

$\frac{۱}{\frac{-b}{۲(-۴a)}} = \log_{۱۰}^{۴} \Rightarrow \frac{۸a}{b} = \log_{۱۰}^{۴} \Rightarrow \frac{۴a}{b} = \log^{۲} \Rightarrow ۲a = \frac{\log^{۲}}{۲}b \Rightarrow a = \frac{\log^{۲}}{۴}b$

$\xrightarrow{I} ۲a=b+c \Rightarrow b(\frac{\log^{۲}}{۲}-۱)=c$

$(۲^{-\frac{۱}{۸}})^{\frac{c}{a}} = (۲^{-\frac{۱}{۸}})^{\frac{b(\frac{\log^{۲}}{۲}-۱)}{b(\frac{\log^{۲}}{۴})}} = (۲^{-\frac{۱}{۸}})^{\frac{۲\log^{۲}-۴}{\log^{۲}}} = ۲^{-\frac{۲}{۸}(\frac{\log^{۲}-۲}{\log^{۲}})}$

$= ۲^{-\frac{۱}{۴}\log_{۲}^{\frac{۲}{۱۰۰}}} = ۲^{\log_{۲}^{(\frac{۲}{۱۰۰})^{-\frac{۱}{۴}}}} = (\frac{۲}{۱۰۰})^{-\frac{۱}{۴}\log_{۲}^{۲}} = (\frac{\overset{۵}{\cancel{۱۰۰}}}{۲})^{\frac{۱}{۴}}$

$a=\frac{b+c}{۲} \to b=۲a-c$

$\frac{۱}{x_۱+x_۲} = \frac{۱}{S} = \frac{۴a}{b} = \frac{\overset{۲}{\cancel{۴}}a}{۲a-c} = \lg ۴ = \cancel{۲}\lg ۲ \to \frac{۲a}{۲a-c} = \lg ۲$

$\xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{۲a-c}{۲a} = \lg_{۲}^{۱۰} \to ۱-\lg_{۲}^{۱۰} = \frac{c}{۲a} \to ۲-\lg_{۲}^{۱۰۰} = \frac{c}{a}$

$(۲^{-\frac{۱}{۸}})^{\frac{c}{a}} = (۲^{\frac{c}{a}})^{-\frac{۱}{۸}} = (۲^{۲-\lg_{۲}^{۱۰۰}})^{-\frac{۱}{۸}} = (\frac{۴}{۱۰۰})^{-\frac{۱}{۸}} = ۵^{\frac{۱}{۴}} = \boxed{\sqrt[۴]{۵}}$