

۱) تابع است $f = \{(1, -1), (2, m), (3, m-1), (4, n), (5, 2)\}$ و $f^{-1} = \{(1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 5)\}$
 غرض از اینست که $f^{-1} \circ f = I$ و $f \circ f^{-1} = I$
 پس $m=2$ و $n=3$
 (۲)

۲) $f = \{(1, 3), (2, m-1), (3, a), (4, 2), (5, -1)\}$
 و $f^{-1} = \{(1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 5)\}$
 پس $m=2$ و $a=1$
 (۲)

چند ضابطه ای است پس باید که شرط رعایت شود
 شرط اول: در هر کدام از بازه ها باید یک به یک

باشد یعنی چون در هر دو بازه یک تابع خطی با شیب مخالف داریم پس این شرط رعایت شده.
 شرط دوم: اشتراک بردارها تهی باشد
 $y_1 = 3x-1$; $x > 1$ $R_{y_1} = [2, +\infty)$
 $y_2 = x+a$; $x < 1$ $R_{y_2} = (-\infty, a+1)$
 $[2, +\infty) \cap (-\infty, a+1) = \emptyset$
 $\Rightarrow 2 \geq a+1 \Rightarrow a \leq 1$
 (۲)

مثل سوال ۲ باید در شرط را رعایت کرد:
 $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x \geq 1 \\ ax+a-1 & x < 1 \end{cases}$
 (۲)

شرط ۱: چون هر دو تابع خطی هستند نقطه نباید شیب صفر باشد
 (۲)

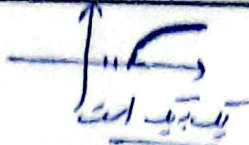
شرط ۲: $y_1 = 3x-1$; $x \geq 1$ $R_{y_1} = [2, +\infty)$
 $y_2 = ax+a-1$; $x < 1$ $R_{y_2} = (-\infty, a]$
 $[2, +\infty) \cap (-\infty, a] = \emptyset$
 $\Rightarrow 2 > a$
 (۲)

۳) $y = x^3 + 2$
 $y_1 = y_2$
 $x^3 = y-2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-2} \Rightarrow y = (\sqrt[3]{x-2})^3 + 2$
 $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2} + 2$
 نمودار این تابع است
 خط $y=2$
 در دو نقطه با تابع را قطع کرد = یک به یک نیست
 پس یک به یک نیست
 (۲)

۴) $y = \frac{x+1}{x-2}$
 یک تابع همگرا است
 پس یک به یک است
 $x = \frac{y+1}{y-2} \Rightarrow y = \frac{x+1}{x-2} = f(x) = \frac{x+1}{x-2}$
 (۲)

۵) $y = \frac{x+2}{x+1} = 2$
 خط $y=2$
 یک به یک نیست
 (۲)

$$y = \sqrt{x-2}$$



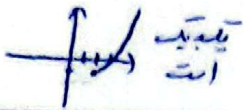
$$y = \sqrt{x-2} \Rightarrow x-2 = y^2$$

$$\Rightarrow x = y^2 + 2 \Rightarrow y = \sqrt{x-2}$$

$$f^{-1}(x) = x^2 + 2$$

$$R_f = D_{f^{-1}} = [2, +\infty)$$

$$y = x^2 - 2x + 2, x \in [1, +\infty)$$



$$y = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow y = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x-1)^2 + 1$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = y-1 \Rightarrow x-1 = \pm \sqrt{y-1} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{y-1}$$

$$y = 2 + \sqrt{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 2$$

$$D_f = R_{f^{-1}} = [1, +\infty)$$

$$y = x + \sqrt{x}$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 + \sqrt{x_1} = x_2 + \sqrt{x_2}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = 0 \Rightarrow \sqrt{x_2} = \sqrt{x_1}$$

$$\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} + 1 \geq 1$$

$$\Rightarrow |x_2| = |x_1| \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$y = x + \sqrt{x} \Rightarrow y = x + \sqrt{x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = (\sqrt{x} + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow y + \frac{1}{4} = (\sqrt{x} + \frac{1}{4})^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{4} = \pm \sqrt{y + \frac{1}{4}} \Rightarrow \sqrt{x} = \pm \sqrt{y + \frac{1}{4}} - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x + \frac{1}{4} - \sqrt{x + \frac{1}{4}}$$

$$f^{-1}(x) = ax + b - \sqrt{x-c}$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{4} \\ c=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+2b+c=1+1-1=1$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}}$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-2}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-2}}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2-2} = \frac{x_2^2}{x_2^2-2} \Rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2-2} = \frac{x_2^2}{x_2^2-2}$$

$$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}} \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{x^2-2} \Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{y^2-1}$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{y^2}{y^2-1}}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$g(x) = \sqrt{x-1} \Rightarrow g^{-1}(\sqrt{x-1}) = x$$

$$\sqrt{x-1} = \frac{x}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow \sqrt{x-1} = \frac{x}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow x = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|} \Rightarrow f\left(\frac{x}{1+|x|}\right) = x$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$$

$$(II), (I)$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right) + g\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)} \Rightarrow g^{-1}(f(x) + \sqrt{f(x)}) = x$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} \Rightarrow f(\sqrt{x-1}) = x$$

$$\sqrt{x-1} = t \Rightarrow t^2 = x-1 \Rightarrow x = t^2 + 1$$

$$(I) \times (II)$$

$$\Rightarrow g^{-1}(\sqrt{x^2+1} + x^2+1) = g^{-1}(12)$$

$$t = \sqrt{x^2+1}$$

$$\Rightarrow t^2 + t = 12 \Rightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Rightarrow (t+4)(t-3) = 0 \Rightarrow t = -4 \text{ or } t = 3$$

$$\Rightarrow g^{-1}(12) = 2$$

$$\Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm \sqrt{12}$$