۱۸٫۲۵

نیایش شاه‌نظری — تکلیف کد ۹ — یازدهم دهتر

۱)
$$f(x)=\begin{cases}\cot\frac{\pi x}{۴} \,;\, x<۱\\ \sqrt{x^۲+۱} \,,\, x\geq ۱\end{cases}$$

۲

$f\circ f(\frac{۲}{۳})=$ $\quad x=\frac{۲}{۳} \xrightarrow{x<۱} \cot\frac{\pi\times ۲}{۳\times ۴}=\cot\frac{\pi}{۶}=\sqrt{۳}$

$x=\sqrt{۳} \xrightarrow{x\geq ۱} \sqrt{x^۲+۱}=\underline{۲}$

---

۲) الف) $f(\frac{۱}{x})=\sqrt{\frac{۲x-۱}{x^۲}}$

۲

$g(x)=۲\cos^۲ x \rightarrow g(\frac{\pi}{۳})=۲\cos^۲(\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}$

$f\circ g(\frac{\pi}{۳})=$ $\quad \rightarrow f(\frac{۱}{۲})=\sqrt{\frac{۲\times ۲-۱}{۴}}=\boxed{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$

ب) $f(x)=[x]$

$g(x)=\frac{x}{۱-x} \rightarrow g(\sqrt{۲})=\frac{\sqrt{۲}\,(۱+\sqrt{۲})}{۱-\sqrt{۲}\,(۱+\sqrt{۲})}=\frac{۲+\sqrt{۲}}{-۱}=-۲-\sqrt{۲}$

$f\circ g(\sqrt{۲})=$

$f(-۲-\sqrt{۲})=[-۲-\sqrt{۲}]=[-\sqrt{۲}]-۲=\boxed{-۴}$

---

۳) $f(x)=\sin x \rightarrow f(\frac{\pi}{۴})=\sin(\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲

$g(x)=x\sqrt{۱-x^۲} \rightarrow g(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sqrt{\frac{۱}{۲}}=\boxed{\frac{۱}{۲}}$

$g\circ f(\frac{\pi}{۴})=\underline{\frac{۱}{۲}}$

f(x) = {(۴,۵),(۶,۵),(۸,۱۲),(۱۰,۱۲)} ۴

g(x) = {(۴,۶),(۲,۴),(۶,۸),(۸,۱۰)}

الف) fog(x) = {(۴,۵),(۲,۵),(۶,۱۲),(۸,۱۲)}

x = ۴ → g(x) = ۶ → fog(۴) = ۵

x = ۲ → g(x) = ۴ → fog(۲) = ۵ ۲

x = ۶ → g(x) = ۸ → fog(۶) = ۱۲

x = ۸ → g(x) = ۱۰ → fog(۸) = ۱۲

ب) gof(x) = ∅

x = ۴ → f(x) = ۵ → gof(x) = ×

x = ۶ → f(x) = ۵ → gof(x) = ×

x = ۸ → f(x) = ۱۲ → gof(x) = ×

x = ۱۰ → f(x) = ۱۲ → gof(x) = ×

ج) fof(x) = ∅

x = ۴ → f(x) = ۵ → fof(x) = ×

x = ۶ → f(x) = ۵ → fof(x) = ×

x = ۸ → f(x) = ۱۲ → fof(x) = ×

x = ۱۰ → f(x) = ۱۲ → fof(x) = ×

د) gog(x) = {(۴,۸),(۲,۶),(۶,۱۰)}

x = ۴ → g(x) = ۶ → gog(x) = ۸

x = ۲ → g(x) = ۴ → gog(x) = ۶

x = ۶ → g(x) = ۸ → gog(x) = ۱۰

x = ۸ → g(x) = ۱۰ → gog(x) = ×

$f(x)=\{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۵),(۱,۷)\}$ ۵

$g(x)=\{(۱,۲),(۳,۱),(a,۲),(b,۱)\}$ ۲

$(۴,۲)\in fog(x) \rightarrow x=۴ \rightarrow g(۴)=m \rightarrow f(m)=۲ \rightarrow m=۳ \rightarrow \boxed{a=۴}$

$(۴,۱)\in gof(x) \rightarrow x=۴ \rightarrow f(۴)=۵ \rightarrow g(۵)=۱ \rightarrow \boxed{b=۵}$

$(a,b)=? \rightarrow \boxed{(۴,۵)}$

$fof(x)=۴x+۳ \rightarrow f(x)=ax+b \rightarrow a(ax+b)+b=۴x+۳$ ۶

$g(۲x+۳)=۳x-۲$ $\qquad a^۲x+ab+b=۴x+۳$ ۲

$۲x+۳=t \rightarrow x=\frac{t-۳}{۲} \rightarrow g(t)=۳\left(\frac{t-۳}{۲}\right)-۲$

$g(x)=\frac{۳x-۹-۴}{۲}=\frac{۳x-۱۳}{۲}$

$a^۲=۴ \rightarrow a=+۲ \rightarrow ۳b=۳ \rightarrow b=۱ \rightarrow ①\ f(x)=۲x+۱$

$\rightarrow a=-۲ \rightarrow -b=۳ \rightarrow b=-۳ \rightarrow ②\ f(x)=-۲x-۳$

$gof(-۱)= \xrightarrow{①} f(-۱)=۲(-۱)+۱=-۱$

$② \rightarrow f(-۱)=-۲(-۱)-۳=-۱ \Big\} \rightarrow g(-۱)=\frac{۳(-۱)-۱۳}{۲}$

$\boxed{g(f(x))=-۸}$

$f(x)=\sqrt{x+|x|} \rightarrow D_f \Rightarrow$ $x+|x|\geq ۰$ ۷

$x<۰$: $f(x)=۰$, $D_{f_۱}=\mathbb{R}$

$x>۰$: $f(x)=\sqrt{۲x}$, $D_{f_۲}=\mathbb{R}$ ۱

$x=۰$: $f(x)=۰ \rightarrow D_{f_۳}=\mathbb{R}$

$g(x)=\frac{۱}{x^۲-۴x}$

$D_{gof}=D_f\cap D_g$

$D_f=D_{f_۱}\cup D_{f_۲}\cup D_{f_۳}=\mathbb{R}$

$$g(x)=\frac{1}{x^2-4x} \longrightarrow D_g = x^2-4x \neq 0$$

$$(x)(x-4)\neq 0 \rightarrow x\neq 0,\quad x\neq 4$$

$$D_g = \mathbb{R}-\{0,4\}$$

$$D_{gof} = D_f \cap D_g = \boxed{\mathbb{R}-\{0,4\}}$$

$\sqrt{x+|x|}\neq 0 \rightarrow x>0$

$\sqrt{x+|x|}\neq 4 \rightarrow x\neq 8$

$D_{gof} = (0,+\infty)-\{8\}$

$$f(x)=\sqrt{1-x^2} \rightarrow 1-x^2\geq 0 \rightarrow x^2\leq 1 \rightarrow -1\leq x\leq 1 \rightarrow D_f=[-1,1]$$ 8

1,25

$$g(x)=\sqrt{x}$$

$$f(x)+g(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x^2} \rightarrow 1-x^2\geq 0 \rightarrow x\in[-1,1]$$

$$x\geq 0 \rightarrow x\in[0,+\infty)$$

$$D_{(f+g)}=[0,1]$$

$0\leq\sqrt{1-x^2}\leq 1 \rightarrow x^2\geq 0$ ✓

$D_{(f+g)of}=[-1,1]$

$$D_{(f+g)of}=D_f\cap D_{(f+g)}=\boxed{[0,1]}$$

الف) $f\left(\frac{3x+1}{x-2}\right)=4x+5 \rightarrow \frac{3x+1}{x-2}=t$ 9

2

$$3x+1=xt-2t$$

$$(3-t)x=-1-2t$$

$$x=\frac{-1-2t}{3-t} \longrightarrow x=\frac{2t+1}{t-3} \longrightarrow f(t)=4\left(\frac{2t+1}{t-3}\right)+5$$

$$f(t)=\frac{8t+4+5t-15}{t-3}=\frac{13t-11}{t-3}\rightarrow \boxed{f(x)=\frac{13x-11}{x-3}}$$

ب) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3} \longrightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2 \quad (1)$$

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\right)$$

$$t=x+\frac{1}{x}\longrightarrow f(t)=t(t^2-3)\rightarrow \boxed{f(x)=x(x^2-3)}$$

$\{(۲\sqrt{۲}\,،\,۰)\,،\,(۱\,،\,۰)\} \in g(x)$ ۱۰

۳

$g\circ f(x) = ۰ \longrightarrow x = a \rightarrow f(x) = a\sqrt{a} \longrightarrow g(a\sqrt{a}) = ۰$

$a\sqrt{a} = ۱ \longrightarrow x = a_۱ = ۱$

$a\sqrt{a} = ۲\sqrt{۲} \longrightarrow x = a_۲ = ۲$

$a_۲ - a_۱ = ۲ - ۱ = \boxed{۱}$