پرنیس عباسیان تکلیف شماره ۹

۱) $f(x) = \begin{cases} \cot \frac{\pi}{۴}x & x \leq ۱ \\ \sqrt{x^۲+۱} , & x > ۱ \end{cases}$

$f(\frac{۲}{۳}) = \frac{\pi \frac{۲}{۳}}{۴} = \frac{\pi}{۶} \rightarrow \cot \frac{\pi}{۶} = \sqrt{۳}$

$f(\sqrt{۳}) = \sqrt{(\sqrt{۳})^۲+۱} = ۲$

$fof(\frac{۲}{۳}) = \boxed{۲}$

---

۲) $f(x) = [x] \rightarrow [-۳٫۴]$ ص -۴

$g(x) = \frac{x}{۱-x} = \frac{\sqrt{۲}}{۱-\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}+۲}{۱-۲} = -۳٫۴$

$fog(\sqrt{۲}) = -۴$

$f(\frac{۱}{x}) = \sqrt{\frac{۲x-۱}{x^۲}}$

$g(x) = ۲\cos^۲ x \rightarrow ۲\cos^۲\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲}$

$\frac{\sqrt{۳}}{۲} \rightarrow fog(\frac{\pi}{۳}) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

---

۳) $f(x) = \sin x \rightarrow \sin(\frac{\pi}{۴}) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$g(x) = x\sqrt{۱-x^۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sqrt{۱-\frac{۲}{۴}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \boxed{\frac{۲}{۴}}$

$gof(\frac{\pi}{۴}) = \frac{۱}{۲}$

---

۴) $fog(x) = \{(۴,۵),(۲,۵),(۶,۲),(۸,۹)\}$ | $gof(x) = \emptyset$

$gog(x) = \{(۴,۸),(۲,۶),(۶,۱۰)\}$ | $fof(x) = \emptyset$

---

۵) $f(x) = \{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۵),(۱,۷)\}$

$g(x) = \{(۱,۲),(۳,۱),(a,۳),(b,۱)\}$

$(۴,۲) \in fog$

$(۴,۱) \in gof$

fog:
$۱ \rightarrow ۲ \rightarrow ۱$
$۳ \rightarrow ۱ \rightarrow ۷$
$a \rightarrow ۳ \rightarrow ۲$
$b \rightarrow ۱ \rightarrow ۷$

$a = ۴$

$b = ۵$

$(a,b) = (۴,۵)$

gof:
$۲ \rightarrow ۱ \rightarrow ۲$
$۳ \rightarrow ۲ \rightarrow x$
$۴ \rightarrow ۵ \rightarrow ۱$
$۱ \rightarrow ۷ \rightarrow x$

---

۶) $f(f(x)) = ۴x+۳ \rightarrow a(ax+b)+b \rightarrow a^۲x+ab+b$

$g(۲x+۳) = ۳x-۲ \rightarrow a(۲x+۳)+b \rightarrow ۲ax+۳a+b \rightarrow ۳x-۲$

$a = \frac{۳}{۲} , b = -\frac{۱۳}{۲}$

$f(x) = ۲x+۱ \quad g(x) = \frac{۳}{۲}x - \frac{۱۳}{۲}$

$f(-۱) = -۲+۱ = -۱ \quad g(-۱) = -۸$

$gof(-۱) = -۸$ ؟!؟

$۷)\ f(x)=\sqrt{x+|x|} \to g(x)=\frac{۱}{x^۲-۴x}$

$D_{gof}=\{x\in D_f\ ,\ f(x)\in D_g\} \to \begin{cases} x\in R \\ \sqrt{x+|x|}\in R-\{۰,۴\}\end{cases} \to D_{gof}=(۰,+\infty)-\{۸\}$

$D_f = x+|x|\geqslant ۰ \to D_f=\mathbb{R}$

$D_g = x^۲-۴x \neq ۰ \to x(x-۴)\neq ۰ \begin{cases} \to x\neq ۴ \\ \to x\neq ۰ \end{cases}$ $\begin{cases} \to x+|x|\neq ۰ \to x \notin (-\infty,۰) \\ \to x+|x|\neq ۱۶ \to x\neq ۸ \end{cases}$

$۸)\ f(x)=\sqrt{۱-x^۲}\ ,\ g(x)=\sqrt{x}$

$D(f+g)of \to \{x\in D_f\ ,\ f(x)\in D_{f+g}\} \to \{x\in[-۱,۱]\} \to D=(-۱,۱]$

$D_{f+g} \to ۰\leqslant ۱-x^۲\leqslant ۱ \to x\in[-۱,۱]$

$D_{f+g}=D_f\cap D_g \to [-۱,۱]\cap[۰,+\infty) \to [۰,۱]$ $\quad D_g=x\geqslant ۰$

$D_f=[-۱,۱]$

$۹)\ f\left(\frac{۳x+۱}{x-۲}\right)=۴x+۵$

$\boxed{\frac{۳x+۱}{x-۲}=t}$

$\frac{۲t+۱}{t-۳} \to f(t)=۴$

$\to \left(\frac{۲t+۱}{t-۳}\right)+۵=\frac{۸t+۴}{t-۳}+۵$

$f(x)=\frac{۸x+۴}{x-۳}+۵$

$f(x+\frac{۱}{x}) = x^۳+\frac{۱}{x^۳}$

$x+\frac{۱}{x}=t$

$(x+\frac{۱}{x})^۳-۳(x+\frac{۱}{x}) \to t^۳-۳t$

$f(x)=x^۳-۳x$

$۱۰)\ f(x)=x\sqrt{x}$

$gof(x) \to g(f(x))=۰$

$g(۱)=۰ \qquad g(۲\sqrt{۲})=۰$

$f(x)=۱ \to x\sqrt{x}=۱ \to \boxed{x=۱}$

$f(x)=۲\sqrt{۲} \to x\sqrt{x}=۲\sqrt{۲} \quad \boxed{x=۲}$

$x_۲-x_۱=۲-۱=۱$