۲۰

پاسخ مبحث ترکیب توابع

۱)
$$f(x)=\begin{cases}\cot\frac{\pi}{4}x & x\le 1\\ \sqrt{x^2+1}, & x>1\end{cases}$$

$f(\frac{4}{3})=\frac{\pi\frac{4}{3}}{4}=\frac{\pi}{3}\to \cot\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

$f(\sqrt{3})=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}=2$

$fof(\frac{4}{3})=2$

۳

۲) $f(x)=[x]\to[-3,4]$ میشه -4

$g(x)=\frac{x}{1-x}=\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+2}{1-2}=-3/4$

$fog(\sqrt{2})=-4$

$f(\frac{1}{x})=\sqrt{\frac{2x-1}{x}}$ $g(x)=2\cos^2x$

$\to 2\cos^2\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ $fog(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳

۳) $f(x)=\sin x\to \sin(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$g(x)=x\sqrt{1-x^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2}{4}$

$gof(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$

۳

۴) $fog(x)=\{(4,5),(2,5),(3,6),(8,9)\}$ | $gof(x)=\phi$

$gog(x)=\{(4,8),(2,3),(3,10)\}$ | $fof(x)=\phi$

۳

۵) $f(x)=\{(0,1),(2,2),(4,5),(1,7)\}$ $b=8$ $(a,b)=(4,8)$

$g(x)=\{(1,2),(3,1),(a,3),(b,1)\}$ $a=4$

$(4,2)$ در fog

$(4,1)$ در gof

fog: $1\to2\to1$, $3\to1\to7$, $a\to3\to2$, $b\to1\to7$

gof: $2\to3\to1$, $3\to2\to x$, $4\to5\to1$, $1\to7\to x$

۳

۶) $f(f(x))=4x+3\to a(ax+b)+b\to a^2x+ab+b$

$g(x+3)=3x-2\to a(x+3)+b\to 3ax+3a+b\to 3x-2$

$a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{13}{2}$

$f(x)=2x+1$ $g(x)=\frac{3}{2}x-\frac{13}{2}$

$f(-1)=-2+1=-1$ $g(-1)=-8$

$gof(-1)=-8$ ok

۳

۷) $f(x)=\sqrt{x+|x|}$ $\rightarrow$ $g(x)=\dfrac{1}{x^2-4x}$

$D_{gof}=\{x\in D_f \,,\, f(x)\in D_g\}$ $\rightarrow$ $\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ \sqrt{x+|x|}\in \mathbb{R}-\{0,4\}\end{cases}$ $\rightarrow D_{gof}=(0,+\infty)-\{8\}$

۲

$D_f = x+|x|\geq 0 \rightarrow D_f=\mathbb{R}$

$D_g = x^2-4x\neq 0 \rightarrow x(x-4)\neq 0$ $\begin{cases} \rightarrow x\neq 4 \\ \rightarrow x\neq 0\end{cases}$ $\begin{matrix} x+|x|\neq 0 \rightarrow x\leq 0\ ;\ (-\infty,0] \\ x+|x|\neq 16 \rightarrow x\neq 8\end{matrix}$

---

۸) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $g(x)=\sqrt{x}$

$D(fog) \rightarrow \{x\in D_g \,,\, f(x)\in D_{f+g}\}$ $\rightarrow \{x\in[-1,1]\}$ $\rightarrow D=[-1,1]$

۲

$D_{f+g} \rightarrow 0\leq 1-x^2\leq 1 \rightarrow x\in[-1,1]$

$D_{f+g}=D_f\cap D_g \rightarrow [-1,1]\cap[0,+\infty) \rightarrow [0,1]$ $\quad D_g = x\geq 0$

$D_f=[-1,1]$

---

۹) $f\left(\dfrac{3x-1}{x-2}\right)=4x+5$

$\dfrac{3x+1}{x-2}=t$

$\dfrac{2t+1}{t-3} \rightarrow f(t)=4$

$\rightarrow 4\left(\dfrac{2t+1}{t-3}\right)+5=\dfrac{8t+4}{t-3}+5$

$f(x)=\dfrac{8x+4}{x-3}+5$

$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^3+\dfrac{1}{x^3}$

$x+\dfrac{1}{x}=t$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right) \rightarrow t^3-3t$

$f(x)=x^3-3x$

۲

---

۱۰) $f(x)=x\sqrt{x}$

$gof(x) \rightarrow g(f(x))=0$

$g(1)=0 \qquad g(2\sqrt{2})=0$

$f(x)=1 \rightarrow x\sqrt{x}=1 \rightarrow x=1$

$f(x)=2\sqrt{2} \rightarrow x\sqrt{x}=2\sqrt{2} \quad x=2$

۲

$x_2-x_1=2-1=1$