۱ـ

$$f(x)=\begin{cases}\cot\frac{\pi x}{4} & x\le 1\\ \sqrt{x^2+1} & x>1\end{cases}$$

$f\circ f(\frac{1}{2})=?$

$f(f(\frac{1}{2}))\Rightarrow$

$f(\frac{1}{2})=\cot\frac{\pi x}{4}=\cot\frac{\pi}{6}\Rightarrow\sqrt{3}$

$f(\sqrt{3})=\sqrt{3+1}=2$

۲ـ

الف) $f(\frac{1}{x})=\sqrt{\frac{2x-1}{x^2}}$, $g(x)=2\cos^2 x$

$f\circ g(\frac{\pi}{4})=?$ $g(\frac{\pi}{4})=2\cos^2\frac{\pi}{4}=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{x})=f(\frac{1}{2})\rightarrow f(2)=\sqrt{\frac{4-1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x=2$

ب) $f(x)=[x]$, $g(x)=\frac{x}{1-x}$, $f\circ g(\sqrt{2})=?$

$g(\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\times\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+2}{-1}=-\sqrt{2}-2\rightarrow f(-\sqrt{2}-2)=[-\sqrt{2}-2]=-4$

(حدود ۳٫٤)

۳ـ

$f(x)=\sin x$, $f(\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$g(x)=x\sqrt{1-x^2}$, $g(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$

$g\circ f(\frac{\pi}{4})=?$

۴ـ

$f(x)=\{(4,5),(6,5),(8,12),(10,12)\}$

$g(x)=\{(4,6),(2,4),(6,8),(8,10)\}$

الف) $f\circ g(x)=\{(4,5)(2,5)(6,12)(8,12)\}$

ب) $g\circ g(x)=\{(4,8)(2,6)(6,10)\}$

ب) $g\circ f(x)$ $\varnothing$

ج) $f\circ f(x)$ $\varnothing$

۵ـ

$f=\{(2,1),(3,2),(4,5),(1,7)\}$

$g=\{(1,2),(3,1),(a,3),(b,1)\}$

$(4,2)\in f\circ g\rightarrow g(x)=t\rightarrow f(t)=2\rightarrow t=3\rightarrow x=a\rightarrow a=4$

$(4,1)\in g\circ f\rightarrow g(f(x))=1$ $f(x)=b\rightarrow(4,5)\rightarrow b=5\Rightarrow(4,5)$

$(a,b)=?=(4,5)$

۶) $f,g \rightarrow$ تابع خطی

$f(x)=2x+1 \rightarrow g(f(-1))=-8$

$f(x)=-2x-3 \rightarrow g(f(-1))=-8$

$f(f(x))=4x+3 \rightarrow f(f(x))=a(ax+b)+b \rightarrow a^2x+ab+b=4x+3$

$a^2=4 \begin{cases} a=2 \rightarrow b=1 \\ a=-2 \rightarrow b=-3 \end{cases}$

$g(2x+3)=3x-2$

$gof(-1)=?$

$g(x)=cx+d$

$g(2x+3)=c(2x+3)+d=3x-2$

$2cx+3c+d \rightarrow 2c=3 \rightarrow c=\frac{3}{2}$; $3c+d=-2 \rightarrow d=-\frac{13}{2}$

$g(x)=\frac{3}{2}x-\frac{13}{2}$

---

۷) $f(x)=\sqrt{x+|x|}$, $g(x)=\frac{1}{x^2-4x}$

$f(x) \begin{cases} \sqrt{2x} & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$

$D_g=\mathbb{R}-\{0,4\}$

$D_f=\mathbb{R}$

$D_{gof}=?$

$\sqrt{x+|x|} \neq \{0,4\}$

$\sqrt{x+|x|} \neq 0 \rightarrow x>0$

$\sqrt{x+|x|} \neq 4 \rightarrow x \neq 8$

$D_{gof}=(0,+\infty)-\{8\}$

---

۸) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $g(x)=\sqrt{x}$

$D(fog+gof)=?$

$\{x \in D_f \quad f(x) \in D_{fog}\}$

$\sqrt{1-x^2} \in [0\ 1] \Rightarrow 0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1 \rightarrow 0 \leq 1-x^2 \leq 1$

$-1 \leq x \leq 1$

$D_f = \frac{-1 \quad +1}{-\ +\ -} \rightarrow [-1\ 1]$

$D_g=[0\ +\infty)$

$D(fog)=D_f \cap D_g=[-1\ 1] \cap [0\ +\infty) \rightarrow [0\ +1]$

در نهایت $\rightarrow$ جواب $[-1\ 1]$

---

۹) الف) $f\left(\frac{3x+1}{x-2}\right)=4x+5$

$f(x)=?$ $\quad \frac{3x+1}{x-2}=t$

$f(t)=4\left(\frac{2t+1}{t-3}\right)+5 \rightarrow x=\frac{2t+1}{t-3}$

$f(x)=\frac{13x-11}{x-3}$

ب) $f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}$

$f(x)=?$ $\quad x+\frac{1}{x}=t$

$t^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3(x+\frac{1}{x}) \Rightarrow t^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3t$

$f(t)=t^3-3t \rightarrow f(x)=x^3-3x$

---

۱۰) نمودار تابع g محور x ها را در نقاطی به طول ۱ و ۲√۲ قطع می‌کند ← g اعتبارسنجی
اختلاف طول نقاطی که نمودار تابع gof(x) محور x ها را قطع می‌کند

$f(x)=x\sqrt{x} \quad x\geq 0$

$g(f(x))=0 \quad g(x)=0$

$x_1=1$

$x_2=2\sqrt{2}$

$x'_2-x'_1=2-1=1$

$f(x)=\begin{cases} x_1=1 \rightarrow x\sqrt{x}=1 \rightarrow x'_1=1 \\ x_2=2\sqrt{2} \Rightarrow x\sqrt{x}=2\sqrt{2} \rightarrow x'_2=2 \end{cases}$