Subject:
Year. Month. Date. ( )

۲۰

دریا دیانی دروستی

۱ـ

$$f(x)=\begin{cases}\cot\frac{\pi x}{۴} & x\leq ۱\\ \sqrt{x^۲+۱} & x>۱\end{cases}$$

$f\circ f(\frac{۲}{۳})=?$

$f(f(\frac{۲}{۳}))\Rightarrow$

$f(\frac{۲}{۳})=\cot\frac{\pi x}{۴}=\cot\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\sqrt{۳}$

$f(\sqrt{۳})=\sqrt{۳+۱}=②$

۵

۲ـ

الف) $f(\frac{۱}{x})=\sqrt{\frac{۲x-۱}{x^۲}}$ ، $g(x)=۲\cos^۲x$

$f\circ g(\frac{\pi}{۴})=?$ $g(\frac{\pi}{۴})=۲\cos^۲\frac{\pi}{۴}=۲\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲}$

$f(\frac{۱}{x})=f(\frac{۱}{۲})\longrightarrow f(۲)=\sqrt{\frac{۴-۱}{۴}}=\boxed{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$

$\boxed{x=۲}$

۵

ب) $f(x)=[x]$ $g(x)=\frac{x}{۱-x}$ $f\circ g(\sqrt{۲})=?$

$g(\sqrt{۲})=\frac{\sqrt{۲}}{۱-\sqrt{۲}}\times\frac{۱+\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}+۲}{-۱}=-\sqrt{۲}-۲\longrightarrow f(-\sqrt{۲}-۲)=[\underbrace{-\sqrt{۲}-۲}_{\approx -۳٫۴۱}]=\boxed{-۴}$

۳ـ

$f(x)=\sin x$ $f(\frac{\pi}{۴})=\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$g(x)=x\sqrt{۱-x^۲}$ $g(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sqrt{۱-\frac{۲}{۴}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\sqrt{\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\boxed{\frac{۱}{۲}}$

$g\circ f(\frac{\pi}{۴})=?$

۵

۴ـ

$f(x)=\{(۴,۵),(۶,۵),(۸,۱۲),(۱۰,۱۲)\}$

$g(x)=\{(۴,۶),(۲,۴),(۶,۸),(۸,۱۰)\}$

الف) $f\circ g(x)=\{(۴,۵)(۲,۵)(۶,۱۲)(۸,۱۲)\}$

ب) $g\circ g(x)=\{(۴,۸)(۲,۶)(۶,۱۰)\}$

ب) $g\circ f(x)$ $\varnothing$

ج) $f\circ f(x)$ $\varnothing$

۵

۵ـ

$f=\{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۵),(۱,۷)\}$

$g=\{(۱,۲),(۳,۱),(a,۳),(b,۱)\}$

$(۴,۲)\in f\circ g\longrightarrow g(x)=t\longrightarrow f(t)=۲\longrightarrow t=۳\longrightarrow x=a\longrightarrow\boxed{a=۴}$

$(۴,۱)\in g\circ f\longrightarrow g(f(x))=۱$ $f(x)=b\longrightarrow(۴,۵)\longrightarrow b=۵\Rightarrow\boxed{(۴,۵)}$

$(a,b)=?$ $=\boxed{(۴,۵)}$

۵

۶) $f,g \to$ تابع خطی

$f(x)=۲x+۱ \to g(f(-۱))=-۸$

$f(x)=-۲x-۳ \to g(f(-۱))=-۸$

$f(f(x))=۴x+۳ \to f(f(x))=a(ax+b)+b \to a^۲x+ab+b=۴x+۳$

$g(۲x+۳)=۳x-۲$

$a^۲=۴ \begin{cases} a=۲ \to b=۱ \\ a=-۲ \to b=-۳ \end{cases}$

$g\circ f(-۱)=?$

$g(x)=cx+d$

$g(۲x+۳)=c(۲x+۳)+d=۳x-۲$

$g(x)=\frac{۳}{۲}x-\frac{۱۳}{۲}$

$۲cx+۳c+d \begin{cases} \to ۲c=۳ \to c=\frac{۳}{۲} \\ \to ۳c+d=-۲ \to d=-\frac{۱۳}{۲} \end{cases}$

---

۷) $f(x)=\sqrt{x+|x|}$ $\quad f(x)\begin{cases}\sqrt{۲x} & x\geq ۰ \\ ۰ & x<۰\end{cases}$

$g(x)=\frac{۱}{x^۲-۴x}$ $\quad D_g=\mathbb{R}-\{۰,۴\}$

$D_f=\mathbb{R}$

$D_{g\circ f}=?$ $\quad \sqrt{x+|x|}\neq\{۰,۴\}$

$\to \sqrt{x+|x|}\neq ۰ \to x>۰$

$\sqrt{x+|x|}\neq ۴ \to x\neq ۸$

$\boxed{D_{g\circ f}=(۰\ +\infty)-\{۸\}}$

---

۸) $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ $\quad \{x\in D_f \quad f(x)\in D_{f\circ g}\}$

$g(x)=\sqrt{x}$ $\quad \sqrt{۱-x^۲}\in[۰\ ۱] \Rightarrow ۰\leq\sqrt{۱-x^۲}\leq ۱ \to ۰\leq ۱-x^۲\leq ۱$

$D(f\circ g+g\circ f)=?$ $\quad D_f= \frac{-۱ \quad +۱}{-\ \ +\ \ -} \to [-۱\ ۱]$ $\quad -۱\leq x\leq ۱$

$D_g=[۰\ +\infty)$ $\quad D(f\circ g)=D_f\cap D_g=[-۱\ ۱]\cap[۰\ +\infty) \to [۰\ +۱]$

در نهایت $\xrightarrow{\text{جواب}}$ $\boxed{[-۱\ ۱]}$

---

۹) الف) $f\left(\frac{۳x+۱}{x-۲}\right)=۴x+۵$

$f(x)=?$ $\quad \frac{۳x+۱}{x-۲}=t$

$f(t)=۴\left(\frac{۲t+۱}{t-۲}\right)+۵ \to x=\frac{۲t+۱}{t-۳}$

$f(x)=\boxed{\frac{۱۳x-۱۱}{x-۳}}$

ب) $f\left(x+\frac{۱}{x}\right)=x^۳+\frac{۱}{x^۳}$

$f(x)=?$ $\quad x+\frac{۱}{x}=t$

$t^۳=x^۳+\frac{۱}{x^۳}+۳\left(x+\frac{۱}{x}\right) \Rightarrow t^۳=x^۳+\frac{۱}{x^۳}+۳t$

$f(t)=t^۳-۳t \to \boxed{f(x)=x^۳-۳x}$

---

۱۰) نمودار تابع g محور x ها را در نقاطی به طول ۱ و $۲\sqrt{۲}$ قطع می کند ← g [illegible]
اختلاف طول نقاطی که نمودار تابع $g\circ f(x)$ محور x ها را قطع می کند

$f(x)=x\sqrt{x}$ $\quad x\geq ۰$

$g(f(x))=۰$ $\quad g(x)=۰$

$x_۱=۱$

$x_۲=۲\sqrt{۲}$

$x'_۲-x'_۱=۲-۱=\boxed{۱}$

$f(x)=\begin{cases} x_۱=۱ \to x\sqrt{x}=۱ \to x'_۱=۱ \\ x_۲=۲\sqrt{۲} \Rightarrow x\sqrt{x}=۲\sqrt{۲} \to x'_۲=۲ \end{cases}$