حل تمرین ۲۰

تکلیف ۹:

۱- $f(x)=\begin{cases}\cot\frac{\pi x}{4} & x\le 1\\ \sqrt{x^2+1} & x>1\end{cases}$ $\quad fof(\frac{2}{3})=?$

۱- $\cot\frac{\pi\times\frac{2}{3}}{4}$, $\cot\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$

۲- $\sqrt{3}\ge 1 \to \sqrt{(\sqrt{3})^2+1}=\sqrt{4}=2$ ۵

۲- الف) $fog(\frac{\pi}{3}) \to f(g(\frac{\pi}{3})) \to g(\frac{\pi}{3})=2\cos^2(\frac{\pi}{3})=2\times(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2})=\sqrt{\frac{4-1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۵

ب) $fog(\sqrt{2}) \to g(\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\times\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{-1}=-(\sqrt{2}+2)$

$f(-\sqrt{2}-2)=[\cancel{-\sqrt{2}}-2]=[-3/..]=-4$ $\quad fog(\sqrt{2})=-4$

$1/...$

۳- $f(x)=\sin x$

$g(x)=x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{8}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ ۵

$f(x)=\sin x \to gof(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin 45$ $\quad gof(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$

۴- الف) fog

$4 \xrightarrow{g(x)} 6 \xrightarrow{f(x)} 5$

$2 \xrightarrow{\sim} 4 \xrightarrow{\sim} 5$

$6 \xrightarrow{\sim} 8 \xrightarrow{\sim} 12$

$8 \xrightarrow{\sim} 10 \xrightarrow{\sim} 12$

$fog=\{(4,5),(2,5),(6,12),(8,12)\}$ ۵

ب) gof

$4 \xrightarrow{f(x)} 5 \xrightarrow{g(x)} \alpha$ $\qquad 8 \xrightarrow{\sim} 12 \xrightarrow{\sim} \alpha$

$6 \xrightarrow{\sim} 5 \xrightarrow{g(x)} \alpha$ $\qquad 10 \xrightarrow{\sim} 12 \xrightarrow{\sim} \alpha$

$gof=\varnothing$

حل تمرینات

ج) $f\circ f$ $\quad ۴ \xrightarrow{f(x)} ۵ \xrightarrow{f(x)} ۶ \quad f\circ f = \emptyset$ — ۴

$۶ \xrightarrow{\;\;} ۵ \to ۹$

$۸ \xrightarrow{\;\;} ۱۲ \xrightarrow{\;\;} ۹$

$۱۰ \xrightarrow{\;\;} ۱۲ \xrightarrow{\;\;} ۹$

د) $g\circ g$ $\quad ۴ \xrightarrow{g(x)} ۶ \xrightarrow{g(x)} ۸ \quad g\circ g = \{(۴,۸),(۲,۶),(۶,۱۰)\}$

$۲ \xrightarrow{\;\;} ۴ \xrightarrow{\;\;} ۶$

$۹ \xrightarrow{\;\;} ۸ \xrightarrow{\;\;} ۱۰$

$۸ \xrightarrow{\;\;} ۱۰$

$f = \{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۵),(۱,۷)\}$ — ۵

$g = \{(۱,۲),(۳,۱),(a,۲),(b,۱)\}$

$f\circ g \Rightarrow ۱ \xrightarrow{g(x)} ۲ \xrightarrow{f(x)} ۱$

$۳ \xrightarrow{\;\;} ۱ \xrightarrow{\;\;} ۱$

$a \xrightarrow{\;\;} ۲ \xrightarrow{\;\;} ۲ \to (۴,۲) \to \boxed{a=۴}$

$b \xrightarrow{\;\;} ۱ \xrightarrow{\;\;} ۷$

$\underbrace{g(f(x))}_{b} = ۱ \to \underbrace{f(x)}_{۴} = ۵ = b \quad a=۴,\ b=۵ = (۴,۵)$

5

$f\circ f = f(ax+b) \Rightarrow a(ax+b)+b \Rightarrow f\circ f = a^2x+ab+b = ۴x+۳ \Rightarrow$ — ۶

$f(x) = -۲x-۳$ or $f(x) = ۲x+۱$

5

$x=-۱ \to f(-۱) = -۱ \qquad g(x+۲) = ۲x-۲$

$g(-۱) = ? \to x-۲ = -۱ \to$

$x = -۳ \quad g(-۱) = -۸ \qquad g\circ f(-۱) = -۸$

حل تمرین سری

$f(x) = \sqrt{x+|x|} \to 0 \le x+|x| \to x \ge 0 \to D_f = [0,+\infty)$ ۷-

$g(x) = \frac{1}{x^2-4x}$ $\to x(x-4) \ge 0 \to x=4,\ x=0 \Rightarrow \mathbb{R} - \{0,4\}$ ۵

$x^2-4x \ge 0$

دو تابع را برابر قرار دهیم $f(x) \neq 0 = x$ $D_{gof} = \{x \in D_f,\ f(x) \in D_g\}$

$f(x) = \sqrt{2x} = 4 \to x = 8$ $D_{gof} = (0,8) \cup (8,+\infty)$

$(f+g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \sqrt{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+|x|^2}}$ ۸-

$\sqrt{1-x^2} + |x| \to 1-x^2 \ge 0 \to 1 \ge x^2 \to -1 \le x \le 1$

۵

$D_{f+g} = D_f = [-1,1],\ 0 \le \sqrt{1-x^2} \le 1 \to x^2 \ge 0$

$D_g = x \ge 0 \cap D_f = -1 \le x \le 1 \to 0 \le x \le 1$

را $f\left(\frac{2x+1}{x-2}\right) = 4x+5 \to \frac{2x+1}{x-2} = t \to tx - 2t = 2x+1$ ۹-

$x(t-2) = 2t+1$ ۵

جایگذاری $f(x) = 4\left(\frac{2t+1}{t-2}\right) + 5 \to \frac{8t+4+5t-10}{t-2} = \frac{13t-6}{t-2} \to \frac{13x-6}{x-2} = f(x)$

ب) $f(x+\frac{1}{x}) = x^3 + \frac{1}{x^3} \to x+\frac{1}{x} = t \to (x+\frac{1}{x})^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$

$(x+\frac{1}{x})^3 - 3(x+\frac{1}{x}) \xrightarrow[x+\frac{1}{x}=t]{} t^3 - 3t = f(t) \to f(x) = x^3 - 3x$

اضافه حل ۲ = ۱ ۱۰-

$g(1) = 0$

$g(\sqrt{2}) = 0$ ۵

$f(x) = x\sqrt{x} \to$ ... $= 1$

$= 2$

$(x+\frac{1}{x})^2 - 4(x+\frac{1}{x}) \xrightarrow[x+\frac{1}{x}=t]{} t^2 - 4t = f(t) \to f(x) = x^2 - 4x$

۱۰ - افقی حال ۱ = ۳

$g(1) = 0$

$g(2\sqrt{2}) = 0$

[illegible]

$f(x) = x\sqrt{x} \to x\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$

$x\sqrt{x} = 2\sqrt{2} \to x = 2$