Subject: تکلیف شما ۹۵،۲
Date

به نام خدا

تیلین امینی / یازدهم رختر

①

$$f(x) = \begin{cases} \cot \frac{\pi}{4}x & ; x \leq 1 \\ \sqrt{x^2+1} & ; x > 1 \end{cases}$$

$\frac{2}{3} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \underbrace{\cot \frac{\pi}{6}}_{} = \sqrt{3}$

$\xrightarrow{\sqrt{3}} \sqrt{3+1} = \boxed{2}$

$fof\left(\frac{2}{3}\right) = 2$

②

الف)

$f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{2x-1}{x^2}}$ $\qquad g(x) = 2\cos^2 x$

$2 \times \underbrace{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

$fog\left(\frac{\pi}{3}\right) = ?$

$f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ب)

$f(x) = [x]$ $\qquad g(x) = \frac{x}{1-x}$ $\qquad fog(\sqrt{2}) = ?$

$\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \Rightarrow \left[\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right] = \left[\frac{1/4}{1-1/4}\right] = \left[\frac{1/4}{-0/4}\right]$

$\sqrt{2} \simeq 1/4$

$= [-3/5] = \boxed{-4}$

Subject:
Date

③

$f(x) = \sin x \qquad g(x) = x\sqrt{1-x^۲} \qquad gof\left(\frac{\pi}{۴}\right)$

$f\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \;\to\; \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sqrt{۱-\frac{۱}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \boxed{\frac{۱}{۲}}$

④

$f(x) = \{(۴,۵)(۶,۵)(۸,۱۲)(۱۰,۱۲)\}$

$g(x) = \{(۴,۶)(۲,۴)(۶,۸)(۸,۱۰)\}$

الف) $fog(x) = \{(۴,۵)(۲,۵)(۶,۱۲)(۸,۱۲)\}$

g	f
۴ → ۶	۴ → ۵
۲ → ۴	۶ → ۵
۶ → ۸	۸ → ۱۲
۸ → ۱۰	۱۰ → ۱۲

ب) $gof(x) = \varnothing$

ج) $fof(x) = \{(۴,۸)(۲,۶)(۶,۱۰)\}$

د) $gog(x) = \varnothing$

⑤

$f = \{(۲,۱)(۳,۲)(۴,۵)(۱,۷)\}$

$g = \{(۱,۲)(۳,۱)(a,۳)(b,۱)\}$

f	g
۲ → ۱	۱ → ۲
۳ → ۲	۳ → ۱
۴ → ۵	a → ۳
۱ → ۷	b → ۱

$(۴,۲) \in fog \to a \to ۳ \to ۲ \Rightarrow a = ۴$

$(۴,۱) \in gof \to ۴ \to \boxed{۵} \to ۱ \Rightarrow b = ۵$

$\} \to (a,b) = (۴,۵)$

PAPCO

$f(f(x)) = ۴x+۳ \longrightarrow f(x) = ax+b$ ۶

$g(۲x+۳) = ۳x-۲ \longrightarrow g(x) = cx+d$

$gof(-1) = ?$

$\rightsquigarrow a(ax+b)+b = a^۲x+ab+b = ۴x+۳$

$\longrightarrow a^۲ = ۴ \Longrightarrow a = \pm ۲ \xrightarrow{if} a = ۲ \Rightarrow ۳b = ۳ , \underline{b = ۱}$

$\xrightarrow{if} a = -۲ \Rightarrow \underline{b = ۳}$

$\rightsquigarrow c(۲x+۳)+d = ۲cx + ۳c + d = ۳x-۲$

$\Rightarrow ۲c = ۳ \longrightarrow c = \frac{۳}{۲} , \quad \frac{۹}{۲}+d = -۲ \Longrightarrow d = -۲-۴,۵ = -۶,۵$

$f(-1) =$ ① $۲x+۱ = -۲+۱ = -۱$

② $-۲x+۳ = ۲-۳ = -۱$

① $g(-1) = \frac{۳}{۲}x - \frac{۱۳}{۲} = -\frac{۳}{۲} - \frac{۱۳}{۲} = \frac{-۱۶}{۲} = \underline{-۸}$

② $g(۵) = \frac{-۳}{۲} - \frac{۱۳}{۲} = \frac{-۱۶}{۲} = \underline{-۸}$

در هر دو مورد = -۸

$f(x) = \sqrt{x+|x|} \qquad g(x) = \frac{1}{x^۲-۴x}$ ۷

$gof \longrightarrow \{x \in Df , f(x) \in Dg\} \rightsquigarrow Df \rightarrow x+|x| \geq ۰$

$\rightarrow x \geq \underbrace{-|x|}_{\text{منفی}} \Rightarrow \underline{x \geq ۰}$ $\qquad g(x) \longrightarrow x^۲-۴x \neq ۰$

$x(x-۴) \neq ۰ \rightarrow x \notin \{۰ , ۴\}$

Subject:
Date

$\sqrt{x+|x|} \neq 0 \to x+|x| \neq 0 \to x \neq 0$, $\sqrt{x+|x|} \neq 4 \Rightarrow x+|x| \neq 16$

$\Rightarrow$ ① $x \neq 8 \Rightarrow D_{f\circ g} = (0, +\infty) - \{8\}$

⑧

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $\qquad g(x) = \sqrt{x}$

$(f+g)\circ f \to \{x \in D_f , f(x) \in D_g\}$

$\to 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$ ①

② $f+g \xrightarrow{\text{اشتراک}} f: -1 \leq x \leq 1$

$\qquad g: x \geq 0 \qquad \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow \underbrace{0 \leq \sqrt{1-x^2}}_{\text{درست همواره}} \leq 1 \to \sqrt{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow 1-x^2 \leq 1$

$\underbrace{0 \leq x^2}$ همواره ✓✓

$\Rightarrow D_{(f+g)\circ f} = [-1, 1]$

⑨

الف) $f\left(\frac{3x+1}{x-2}\right) = 4x+5$

$\frac{3x+1}{x-2} = t \Rightarrow tx - 2t = 3x + 1 \Rightarrow tx - 3x = 2t + 1$

$\Rightarrow x(t-3) = 2t+1 \Rightarrow x = \frac{2t+1}{t-3} \to \left(\frac{2x+1}{x-3}\right)4 + 5$

$\Rightarrow f(x) = \frac{8x+4}{x-3} + 5 \Rightarrow f(x) = \frac{13x-11}{x-3}$

Subject:
Date

ب)

$$f(\underbrace{x+\frac{1}{x}}_{t})=\underbrace{x^3+\frac{1}{x^3}}$$

$$\downarrow$$

$$(\underbrace{x+\frac{1}{x}}_{t})(\underbrace{x^2-1+\frac{1}{x^2}}_{t^2-3})$$

$$t^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$$

$$\Rightarrow f(t)=t(t^2-3)\xrightarrow{t=x}f(x)=x^3-3x$$

(10

$$g(x)\longrightarrow 1,\ 2\sqrt{2}\rightsquigarrow (x-1)(x-2\sqrt{2})$$

$$f(x)=x\sqrt{x}$$

$$\rightarrow gof(x)\longrightarrow x^2-(1+2\sqrt{2})x+2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow (x\sqrt{x})^2-(1+2\sqrt{2})x\sqrt{x}+2\sqrt{2}$$

$$x-1=0\Longrightarrow x\sqrt{x}-1=0\Rightarrow x\sqrt{x}=1\rightsquigarrow x=1$$

$$x-2\sqrt{2}=0\Rightarrow x\sqrt{x}-2\sqrt{2}=0\Rightarrow x\sqrt{x}=2\sqrt{2}$$

$$\text{یا}\quad x^3=8\Rightarrow x=2$$

$$\Rightarrow 2-1=1$$