تکلیف شماره‌ی ۴ — هندسه پایه — یازدهم دختر C

① الف)
$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x} - \frac{x}{x-1}}$$

$$\frac{x-1}{x} - \frac{x}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x-1)^2 - x^2}{x(x-1)} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 1 - x^2}{x(x-1)} \geq 0$$

$x = \frac{1}{2}$

$$\frac{-2x+1}{x(x-1)} \geq 0$$

$x = 0$ ، $x = 1$

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & \frac{1}{2} & & 1 & \\ + & | & - & | & + & | & - \end{array}$$

$$\boxed{D_f = (-\infty, 0) \cup [\tfrac{1}{2}, 1)}$$

---

① ب)
$$f(x) = \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x}}{\frac{3}{x-1} + \frac{1}{x+2}} = \frac{\frac{x-2x-2}{x(x+1)}}{\frac{3x+6+x-1}{(x-1)(x+2)}} = \frac{\frac{-(x+2)}{x(x+1)}}{\frac{4x+5}{(x-1)(x+2)}}$$

مخرج در صورت نباید صفر شود $\Rightarrow x \neq 0 , x \neq -1$

صورت و مخرج در مخرج نباید صفر شود $\Rightarrow x \neq 1 , x \neq -2 , x \neq \frac{-5}{4}$

$$\boxed{D_f = R - \{-2, \tfrac{-5}{4}, -1, 0, 1\}}$$

---

② الف)
$$f(x) = \sqrt{\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)^x - 9\right)\left(32 - 4^x\right)} \qquad \left(\left(\tfrac{1}{3}\right)^x - 9\right) - \left(32 - 4^x\right) \geq 0$$

$$\left(\tfrac{1}{3}\right)^x - 9 = 0 \rightarrow x = -2$$

$$32 - 4^x = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$\begin{array}{ccccc} & -2 & & \frac{5}{2} & \\ + & | & - & | & + \end{array}$$

$$\boxed{D_f = (-\infty, -2] \cup [\tfrac{5}{2}, +\infty)}$$

---

② ب)
$$\sqrt[4]{x-1} + \sqrt{y+1} = 3 \rightarrow \sqrt{y+1} = 3 - \sqrt[4]{x-1}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} y+1 = 9 - 6\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[2]{x-1} \rightarrow y = 8 - 6\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[2]{x-1}$$

$$x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \quad (I)$$

$$3 - \sqrt[4]{x-1} \geq 0 \rightarrow \sqrt[4]{x-1} \leq 3 \xrightarrow{\text{توان ۴}} x - 1 \leq 81 \rightarrow x \leq 82 \quad (II)$$

$$\boxed{D_f = (I) \cap (II) = [1, 82]}$$

۳

$$f(x) = \frac{\log_{4}(x^2-x-2)}{\sqrt{x^2-1}+1}$$

I

$x^2-x-2>0 \rightarrow (x-2)(x+1)>0$ $\quad$ $x=2$ یا $x=-1$ $\quad \rightarrow (-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$

II

$x^2-1 \geq 0 \rightarrow (x-1)(x+1) \geq 0$ $\quad$ $x=1$ یا $x=-1$ $\quad \rightarrow (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$ ★

$\sqrt{x^2-1}+1 \neq 0 \rightarrow \sqrt{x^2-1} \neq -1 \rightarrow$ عبارت زیر رادیکال به ازای x هایی

که عبارت در آن ها تعریف شود یعنی

طبق ★ $\rightarrow (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$ جواب رادیکال + می شود همواره.

III

$$\boxed{D_f = \text{I} \cap \text{II} \cap \text{III} = (-\infty,-1) \cup (2,+\infty)}$$

۴

$\sqrt{3+ax-x^2} \rightarrow 3+ax-x^2 \geq 0 \rightarrow x^2-ax-3 \leq 0$

$-2 \times b = 3 \rightarrow b = \frac{3}{2} \rightarrow a = -2 + \frac{3}{2} = \frac{-1}{2}$

$\rightarrow a+b = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$

۵

$$f(x) = \begin{cases} 3x-2 & x \geq 1 \\ 2x+3 & x < 1 \end{cases}$$

$g(x) = \sqrt{f(x)-x} \rightarrow f(x)-x \geq 0 \rightarrow f(x) \geq x$

$\xrightarrow{\text{if } x \geq 1} 3x-2 \geq x \rightarrow x \geq 1$ ✓ I

$\xrightarrow{\text{if } x < 1} 2x+3 \geq x \rightarrow x \geq -3$ II

$D_f = \text{I} \cup \text{II} = \boxed{[-3,+\infty)}$

۶

$$f(x) = \begin{cases} (a+1)(x+2) & x > 1 \\ 3a+2x & x \leq 1 \end{cases}$$

$2f(0) = f(-2) + a \rightarrow 2 \times (7)(a+1) = 3a + 2 \times (-2) + a \Rightarrow 14a + 14 = 4a - 4$

$\rightarrow 10a = -18 \rightarrow \boxed{a = \frac{-9}{5}}$

۷

$$f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+۲ \qquad \longrightarrow f\underbrace{(۲+\sqrt{۳})}_{t}+f\underbrace{(۲-\sqrt{۳})}_{\frac{1}{t}}$$

$$\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}=۲-\sqrt{۳}$$

$$f(t)+f(\tfrac{1}{t})=\sqrt{t}+\frac{۱}{\sqrt{t}}+۲+\sqrt{\frac{1}{t}}+\frac{۱}{\sqrt{\frac{1}{t}}}+۲$$

$$=۲\left(\sqrt{t}+\frac{۱}{\sqrt{t}}\right)+۴$$

$$\longrightarrow ۲\left(\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}\right)+۴=۲\left(\underbrace{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}_{A}\right)+۴$$

$$A^۲=(۲-\sqrt{۳})+(۲+\sqrt{۳})+۲\sqrt{(۲+\sqrt{۳})(۲-\sqrt{۳})}=۶\to A=\sqrt{۶}$$

$$f(۲+\sqrt{۳})+f(۲-\sqrt{۳})=۲A+۴=\boxed{۲\sqrt{۶}+۴}$$

۸

$$۲f(x)-۳f(-x)=۴x^۲-x$$
$$۲f(-x)-۳f(x)=۴x^۲+x$$

$$۲\times(۲f(x)-۳f(-x)=۴x^۲-x)$$
$$۳\times(-۳f(x)+۲f(-x)=۴x^۲+x)$$

$$-۵f(x)=۲۰x^۲+x$$

$$\boxed{f(x)=\frac{۲۰x^۲+x}{-۵}=-۴x^۲-\frac{x}{۵}}$$

$$\boxed{=\frac{-x(۲۰x+۱)}{۵}}$$

۹

$$(x+۲)f(x)-۲xf(x+۲)=۴x^۲-mx+۳m-۱$$

$$\xrightarrow{x=۰}(۲f(۰)=۳m-۱)\times -۳$$

$$\xrightarrow{x=-۲}۶f(۰)=۱۶+۲m+۳m-۱$$

$$۰=۹m+۳+۱۶+۵m-۱ \Rightarrow ۴m=۱۸\to m=\frac{۹}{۲}$$

$$۲f(۰)=۳\left(\frac{۹}{۲}\right)-۱=\frac{۲۷-۲}{۲}=\frac{۲۵}{۲}\to f(۰)=\frac{\frac{۲۵}{۲}}{۲}=\frac{۲۵}{۴}=\boxed{۶/۲۵}$$

۱۰

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=ax+b+\frac{a}{x}+b=\underline{a\left(x+\frac{۱}{x}\right)+۲b=۳x-۱۲+\frac{۳}{x}}$$

$$\frac{۳x^۲-۱۲x+۳}{x}=۳x-۱۲+\frac{۳}{x}$$

$$\left.\begin{matrix}a=۳\\ b=-۶\end{matrix}\right\}f=۳x-۶$$

$$f(-۱)=۳(-۱)-۶=-۹$$