۲۰

نیایش شاه‌نظری — تکلیف ۴ — یازدهم تجربی

①

الف) $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x}-\frac{x}{x-1}}$

$\frac{x-1}{x}-\frac{x}{x-1}\geq 0$

$\frac{(x-1)^2-x^2}{x(x-1)}\geq 0 \to \frac{-2x+1}{x(x-1)}\geq 0$

x		0		$\frac{1}{2}$		1	
	$+$		$-$	0	$+$		$-$

$\boxed{D_f=(-\infty,0)\cup[\frac{1}{2},1)}$

ب) $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x}}{\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+2}}$

① $x+1\neq 0 \to x\neq -1$

② $x\neq 0$

③ $\frac{3x+6+x-1}{(x-1)(x+2)}=\frac{4x+5}{(x-1)(x+2)}\neq 0$

$x\neq 1$

$x\neq -2$

$x\neq \frac{-5}{4}$

$\boxed{D_f=\mathbb{R}-\{-1,1,-2,-\frac{5}{4},0\}}$

②

الف) $f(x)=\sqrt{\left((\frac{1}{3})^x-9\right)\left(32-4^x\right)}$

$\left((\frac{1}{3})^x-9\right)\left(32-4^x\right)\geq 0$

$2^5=4^x=2^{2x}\to x=2.5$

$3^{-x}=9\to x=-2$

x		-2		2.5	
	$+$	0	$-$	0	$+$

$\boxed{D_f=(-\infty,-2]\cup[2.5,+\infty)}$

ب) $\sqrt[4]{x-1}+\sqrt{y+1}=3$

① $x-1\geq 0\to x\geq 1$

② $(\sqrt[4]{x-1})^4\leq (3)^4 \to x-1\leq 81$

$x\leq 82$

$\boxed{D_f=[1,82]}$

③

$$f(x)=\frac{\log_4 (x^2-x-2)}{\sqrt{x^2-1}+1}$$

① $x^2-x-2>0$

$(x-2)(x+1)>0$

	-1		2	
$+$	0	$-$	0	$+$

$x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

② $x^2-1\geq 0 \to$

	-1		1	
$+$	0	$-$	0	$+$

$\to x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

①∩② $\to \boxed{(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)=D_f}$

۵

④

$f(x)=\sqrt{-x^2+ax+3}$ — ۲- در بازه مورد نظر است پس ۲- یکی از ریشه‌های معادله است

$f(-2)=0\to -4-2a+3=0$

$-2a-1=0\to \boxed{a=\frac{-1}{2}}$

$f(x)=\sqrt{-x^2-\frac{1}{2}x+3}\to$ با بدست آوردن ریشه‌های این تابع می‌توانیم b را بدست آوریم.

۵

$\Delta=\frac{1}{4}-4(-1)(3)=\frac{49}{4}\to x=\dfrac{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}}}{-2}\Rightarrow -2$

$\boxed{b=\frac{3}{2}} \leftarrow \dfrac{\frac{1}{2}-\frac{7}{2}}{-2}=\frac{3}{2}$

$a+b=\frac{3}{2}+(-\frac{1}{2})=1$ ✓

⑤

$f(x)=\begin{cases}3x-2 & x\geq 1\\ 2x+3 & x<1\end{cases}$ $\qquad g(x)=\sqrt{f(x)-x}$

$f(x)-x\geq 0 \to$ ① $x\geq 1\to 3x-2-x\geq 0\to 2x-2\geq 0$

② $x\geq 1\to$ ② ۵

(A) ← ①∩② $\to x\geq 1$

② $x<1\to 2x+3-x\geq 0\to x+3\geq 0$

① $x\geq -3$

(B) ← ①∩② $\to -3\leq x<1$

$$A \cup B \rightarrow \boxed{[-۳ , +\infty) = D_f}$$

۶

$$f(x) = \begin{cases} (a+۱)(x+۲) & x > ۱ \\ ۳a + ۲x & x \leq ۱ \end{cases}$$

$$۲f(۵) = f(-۲) + a \rightarrow ۲(a+۱)(x+۲) = ۳a + ۲x + a$$

$$۲(a+۱)(۷) = ۴a + ۲(-۲)$$

$$۱۴a + ۱۴ = ۴a - ۴$$

$$۱۰a = -۱۸ \rightarrow a = \frac{-۱۸}{۱۰} = \boxed{-۱/۸}$$

۷

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{۱}{\sqrt{x}} + ۲ \quad , \quad f(\underbrace{۲+\sqrt{۳}}_{x}) + f(\underbrace{۲-\sqrt{۳}}_{\frac{۱}{x}}) = ?$$

$$\sqrt{x} + \frac{۱}{\sqrt{x}} + ۲ + \frac{۱}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} + ۲ = ۲\left(\sqrt{x} + \frac{۱}{\sqrt{x}}\right) + ۴ = \boxed{۲\sqrt{۶} + ۴}$$

$$\left(\sqrt{x} + \frac{۱}{\sqrt{x}}\right)^۲ = \left(\sqrt{۲+\sqrt{۳}} + \frac{۱}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}\right)^۲ = ۲ + \sqrt{۳} + ۲ - \sqrt{۳} + ۲ = ۶ \rightarrow$$

$$\sqrt{۲+\sqrt{۳}} + \frac{۱}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}} = \boxed{\sqrt{۶}}$$

۸

$$\begin{cases} ۲f(x) - ۳f(-x) = ۴x^۲ - x \\ ۲f(-x) - ۳f(x) = ۴x^۲ + x \end{cases}$$

$$۲f(x) - ۳f(-x) = ۴x^۲ - x \rightarrow -۳f(-x) + ۲f(x) = ۴x^۲ - x$$

$$+\frac{۳}{۲} \times \left(۲f(-x) - ۳f(x) = ۴x^۲ + x\right) \rightarrow +۳f(-x) - \frac{۹}{۲} f(x) = +۶x^۲ + \frac{۳}{۲}x$$

$$-\frac{۵}{۲} f(x) = ۱۰x^۲ + \frac{۱}{۲}x$$

$$\boxed{f(x) = -۴x^۲ - \frac{۱}{۵}x}$$

$(x+2)f(x) - 3x f(x+2) = 4x^2 - mx + 3m - 1$ (9)

$x = 0 \rightarrow 2f(0) = 3m - 1 \rightarrow f(0) = \dfrac{3m-1}{2}$ (1)

$x = -2 \rightarrow 6f(0) = 16 + 2m + 3m - 1 = 5m + 15$

$f(0) = \dfrac{5m+15}{6}$ (2)

$(1) = (2) \rightarrow \dfrac{3m-1}{2} = \dfrac{5m+15}{6} \rightarrow 18m - 6 = 10m + 30$

$8m = 36$

$m = \dfrac{36}{8} = \dfrac{9}{2} = 4/5$

$f(0) = \dfrac{3m-1}{2} = \dfrac{\frac{27}{2} - 1}{2} = \boxed{\dfrac{25}{4}}$

$f(x) + f(\frac{1}{x}) = \dfrac{3x^2 - 12x + 3}{x}$ (10)

$\left.\begin{array}{l} f(x) = ax + b \\ f(\frac{1}{x}) = a \times \frac{1}{x} + b \end{array}\right\} \rightarrow f(x) + f(\frac{1}{x}) = ax + \dfrac{a}{x} + 2b \Rightarrow$

$f(x) + f(\frac{1}{x}) = \dfrac{ax^2 + 2bx + a}{x}$

$a = 3$ $\quad b = -6$

$f(x) = 3x - 6 \rightarrow f(-1) = 3(-1) - 6 = \boxed{-9}$