پارمیس عباسیان یازدهم دختر ۲

۱

الف)

$$f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x}-\frac{x}{x-1}}$$

$$\frac{x-1}{x}-\frac{x}{x-1}\geq 0 \longrightarrow \frac{\cancel{x^2}+1-2x-\cancel{x^2}}{x^2-x}=\frac{1-2x}{x(x-1)}\geq 0$$

$1-2x \to \frac{1}{2}$ ، $x \to 0$ ، $x-1 \to 1$

$$\Rightarrow \begin{array}{cccc} 0 & \frac{1}{2} & 1 & \\ \hline + & - & + & - \end{array}$$

$$D_f=(-\infty,0)\cup[\tfrac{1}{2},1)$$

---

ب)

$$f(x)=\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x}}{\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+2}} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+1\neq 0 \longrightarrow x\neq -1 \\ x\neq 0 \qquad x-1\neq 0 \longrightarrow x\neq 1 \\ x+2\neq 0 \qquad x\neq -2 \end{cases}$$

$$\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+2}\neq 0 \longrightarrow \frac{\overbrace{3x+6+x-1}^{4x+5}}{x^2+x-2}\neq 0$$

$$\frac{4x+5}{(x+2)(x-1)} \qquad 4x+5 \to -\frac{5}{4} \qquad x+2 \to -2 \qquad x-1 \to 1$$

$$\longrightarrow D=\mathbb{R}-\left\{-2,-\frac{5}{4},-1,0,1\right\}$$

(۲)

الف)

$$f(x)=\sqrt{\left(\left(\frac{1}{۳}\right)^x-۹\right)\left(۳۲-۴^x\right)}$$

$$\left(\left(\frac{1}{۳}\right)^x-۹\right)\left(۳۲-۴^x\right)\geqslant ۰$$

$$\left(\frac{1}{۳}\right)^x-۹=۰ \longrightarrow \left(\frac{1}{۳}\right)^x=۹ \longrightarrow \left(\frac{1}{۳}\right)^x=۳^۲ \longrightarrow ۳^{-x}=۳^۲$$

$$x=\boxed{-۲}$$

$$۳۲-۴^x=۰ \qquad ۲^۵=۴^x \longrightarrow ۲^۵=۲^{۲x} \qquad x=\frac{۵}{۲}$$

| | $-۲$ | | $\frac{۵}{۲}$ | |
|---|---|---|---|---|
| $+$ | ۰ | $-$ | ۰ | $+$ |

$$D_f=(-\infty,-۲]\cup\left[\frac{۵}{۲},+\infty\right)$$

ب)

$$\sqrt[۴]{x-1}+\sqrt{y+1}=۳$$

$$\sqrt{y+1}=۳-\sqrt[۴]{x-1}$$

$$۳-\sqrt[۴]{x-1}\geqslant ۰ \qquad ۳\geqslant\sqrt[۴]{x-1}$$

$$۸۱\geqslant x-1 \longrightarrow x\leqslant ۸۲ \quad \mathrm{I}$$

$$\sqrt[۴]{x-1} \longrightarrow x-1\geqslant ۰ \qquad x\geqslant 1 \quad \mathrm{II}$$

$$\mathrm{I}\cap\mathrm{II}=[1,۸۲]$$

(۳)

$$f(x) = \frac{\log_{4}^{(x^2-x-2)}}{\sqrt{x^2-1}+1}$$

$$x^2-x-2>0 \longrightarrow (x-2)(x+1)>0$$

I $D_f = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

$$\sqrt{x^2-1}+1 \neq 0 \longrightarrow \sqrt{x^2-1} \neq -1$$ همواره برقرار

$$\longrightarrow x^2-1 \geq 0 \quad x^2 \geq 1 \quad x \geq 1 \;,\; x \leq -1$$

II $D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

$$\mathrm{I} \cap \mathrm{II} \rightarrow (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

---

$\sqrt{3+ax-x^2}$ . $a+b=?$

(۴)

$[-2, b]$

$3+ax-x^2 \geq 0$ $\quad x=-2 \rightarrow \sqrt{3-2a-4} \rightarrow \sqrt{-1-2a} \rightarrow a=-\frac{1}{2}$

$a=-\frac{1}{2} \longrightarrow \sqrt{-x^2-\frac{x}{2}+3} \longrightarrow \Delta > 0 \quad b^2-4ac$

$\frac{1}{4}-4(-1)(3)$

$\frac{1}{4}+12 \rightarrow \frac{1}{4}+\frac{48}{4}=\frac{49}{4}$

$x_A=-2$

$x_B=\frac{3}{2} \quad a+b=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1$

$P=\frac{c}{a} \rightarrow -2x_B=-3 \longrightarrow x_B=\frac{3}{2}$

۵

$$f(x)=\begin{cases} ۳x-۲ \to x \geq ۱ \\ ۲x+۳ \to x<۱ \end{cases}$$

I $x \geq ۱$

$\to \sqrt{۳x-۲} \geq x$

$۳x-۲ \geq x$

$x \geq ۱$

II $\to x<۱ \to ۲x+۳ \geq x$

$x \geq -۳$

$$g(x)=\sqrt{f(x)-x} \to f(x) \geq x$$

$$D_g = \text{I} \cup \text{II} = [-۳, +\infty)$$

---

۶

$$f(a)=\begin{cases} (a+۱)(a+۲) & x>۱ \\ ۳a+۲x & x \leq ۱ \end{cases}$$

$۲f(۵) = f(-۲) + a$

$-۴+۴a = ۱۴a+۱۴ \to -۱۱ = ۱۱a \to a=+۱$

---

۷

$f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+۲$

$f(۲+\sqrt{۳}) = \sqrt{۲+\sqrt{۳}} + \dfrac{1}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}} + ۲$

$\sqrt{۲-\sqrt{۳}}$

$f(۲-\sqrt{۳})+f(۲+\sqrt{۳}) = ?$

$\Rightarrow \boxed{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+۲}$

$+$

$\sqrt{۲-\sqrt{۳}} + \sqrt{۲+\sqrt{۳}} + ۲ = \boxed{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+۲}$

$۲\sqrt{۲+\sqrt{۳}} + ۲\sqrt{۲-\sqrt{۳}} + ۴$

$8)$ $\quad 2f(x) - 3f(-x) = 4x^2 - x \qquad f(x) = ?$

$$\begin{cases} \times 2 & 2f(x) - 3f(-x) = 4x^2 - x \\ \times 3 & 2f(-x) - 3f(x) = 4x^2 + x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4f(x) - \cancel{6f(-x)} = 8x^2 - 2x \\ \cancel{6f(-x)} - 9f(x) = 12x^2 + 3x \end{cases}$$

$$-5f(x) = 20x^2 + x$$

$$f(x) = \frac{20x^2 + x}{-5}$$

---

$9)$ $\quad (x+2)f(x) - 3xf(x+2) = 4x^2 - mx + 2m - 1$

$f(0) = ?$

$$x=0 \rightarrow 2f(0) - f(2) \times 0 = 3m - 1$$

$$x=-2 \rightarrow 0 \times f(-2) + 6f(0) = 16 + 5m - 1$$

$$6f(0) = 15 + 5m$$

$$2f(0) = 3m - 1$$

$$4f(0) = \frac{14 + 2m}{4}$$

$$f(0) = 4 + \frac{m}{2} = f(0) = \frac{16}{4} + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$$

$$m = \frac{15 + 5m}{\cancel{6}\,3} = \frac{3m - 1}{\cancel{2}} \Rightarrow 9m - 3 = 15 + 5m$$

$$m = \frac{9}{2}$$