آمنه رزاق‌پور کامکار (؟)

20

1) الف) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x} - \frac{x}{x-1}}$ $\quad$ $+ \overset{0}{|} - \overset{\frac{1}{2}}{|} + \overset{1}{|} -$ $\quad$ $D=(-\infty,0)\cup[\frac{1}{2},1)$

$\frac{x-1}{x} - \frac{x}{x-1} \geq 0 \rightarrow \frac{x^2+1-2x-x^2}{x^2-x} = \frac{1-2x}{x(x-1)} \geq 0$

5

ب) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x}}{\frac{3}{x-1} + \frac{1}{x+2}}$ $\quad$ $x+1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$ $\quad$ $\frac{3}{x-1} + \frac{1}{x+2} \neq 0$

$x \neq 0$

$x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$ $\quad \rightarrow D = R - \{-2, -\frac{5}{4}, -1, 0, 1\}$

$x+2 \neq 0 \rightarrow x \neq -2$

---

2) الف) $f(x) = \sqrt{((\frac{1}{3})^x - 9)(32 - 4^x)}$

$((\frac{1}{3})^x - 9)(32 - 4^x) \geq 0$ $\quad$ $(\frac{1}{3})^x - 9 = 0 \rightarrow (\frac{1}{3})^x = 9 \rightarrow (\frac{1}{3})^x = 3^2 \rightarrow 3^{-x} = 3^2$

$32 - 4^x = 0 \rightarrow 2^5 = 4^x \rightarrow 2^5 = 2^{2x} \rightarrow x = \frac{5}{2}$

5

$+ \overset{-2}{|} - \overset{\frac{5}{2}}{|} +$ $\quad$ $D = (-\infty, -2] \cup [\frac{5}{2}, +\infty)$

ب) $\sqrt[4]{x-1} + \sqrt{y+1} = 3$ $\quad$ $\sqrt{y+1} = 3 - \sqrt[4]{x-1}$ $\quad$ $3 - \sqrt[4]{x-1} \geq 0$

$\rightarrow 3 \geq \sqrt[4]{x-1} \rightarrow 81 \geq x-1 \rightarrow x \leq 82$ ①

$\sqrt[4]{x-1} \xrightarrow{\text{زوج}} x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$ ② $\quad$ $D_1 \cap D_2 = [1, 82]$

---

3) $f(x) = \dfrac{\log_2^{(x^2-x-2)}}{\sqrt{x^2-1}+1}$ $\quad$ $x^2-x-2 > 0 \rightarrow (x-2)(x+1) > 0$ $\quad + \overset{-1}{|} - \overset{2}{|} +$

$\sqrt{x^2-1} + 1 \neq 0 \rightarrow \sqrt{x^2-1} \neq -1$ $\quad$ $D_1 = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

5

هیچ‌گاه صفر نمی‌شود

$x^2-1 \geq 0 \rightarrow x^2 \geq 1 \rightarrow x \geq 1 \cup x \leq -1$

$D_2 = [1, +\infty) \cup (-\infty, -1]$ $\quad$ $D_1 \cap D_2 = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

3)

$\sqrt{3+ax-x^2} \longrightarrow D=[-2, b] \qquad a+b=?$

$3+ax-x^2 \geq 0$

$S = x_1+x_2 = -\frac{b}{a} \rightarrow \frac{-a}{-1} \rightarrow -2+b=a \rightarrow \frac{3}{2}-2=a \rightarrow a=-\frac{1}{2}$

$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \rightarrow -2\times b = \frac{3}{-1} \rightarrow 2b=3 \longrightarrow b=\frac{3}{2}$

$a+b = \frac{-1}{2}+\frac{3}{2} = \boxed{1}$

5)

$f(x) = \begin{cases} 3x-2 & x\geq 1 \\ 2x+3 & x<1 \end{cases}$

$g(x) = \sqrt{f(x)-x} \rightarrow f(x) \geq x$

$x\geq 1 \rightarrow 3x-2 \geq x \rightarrow 2x\geq 2 \rightarrow x\geq 1$

$2x+3 \geq x \longrightarrow x\geq -3 \rightarrow -3\leq x<1$

$D_{g(x)} = D_1 \cup D_2 = \underline{[-3, +\infty)}$

4)

$f(x) = \begin{cases} (a+1)(x+2) & x>1 \\ 3a+2x & x\leq 1 \end{cases}$

$2f(5) = f(-2)+a \longrightarrow 2(7a+7) = 3a-4+a \rightarrow 14a+14 = 3a-4+a$

$\longrightarrow 10a = -18 \rightarrow a = \boxed{\frac{-18}{10}}$

$f(5) = (a+1)(5+2) = 7a+7$

$f(-2) = 3a-4$

---

7)

$f(x) = \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+2$

$f(2+\sqrt{3}) = \sqrt{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + 2 = \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} + 2$

$f(2-\sqrt{3}) + f(2+\sqrt{3}) = ?$

$\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}} + 2 + \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} + 2 = 2\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right) + 4 = \boxed{2\sqrt{6}+4}$

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = 2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+2\sqrt{4-3} = 6 \rightarrow \sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6}$

(۸

$۲f(x) - ۳f(-x) = ۴x^۲ - x \qquad f(x) = ?$

$-x \to ۲f(-x) - ۳f(+x) = ۴x^۲ + x \xrightarrow{\times ۳}$

$۴f(x) - ۶f(-x) = ۸x^۲ - ۲x$

$۹f(-x) - ۹f(x) = ۱۲x^۲ + ۳x$

$-۵f(x) = ۲۰x^۲ + x \longrightarrow f(x) = \frac{-۲۰x^۲ - x}{۵} \to \boxed{-۴x^۲ - \frac{۱}{۵}x}$

(۹

$(x+۲)f(x) - ۳x\,f(x+۲) = ۴x^۲ - mx + ۳x - ۱$

$x = ۰ \to ۲f(۰) = ۳\times۲ - ۱ \longrightarrow ۴f(۰) = \cancel{۱۵+۵m}\ ۹x - ۴$

$x = -۲ \to ۴f(۰) = ۱۶ + ۲m + ۴m - ۱ \Rightarrow ۱۵ + ۵m \to ۴f(۰) = ۱۵ + ۵m$

$۹m - ۳ = ۱۵ + ۵m$

$\to ۴m = ۱۸ \to m = \frac{۱۸}{۴} = \boxed{\frac{۹}{۲}}$

$m = \frac{۹}{۲} \qquad ۲f(۰) = ۳\left(\frac{۹}{۲}\right) - ۱ = \frac{۲۷}{۲} - ۱ = \frac{۲۵}{۲} \to f(۰) = \frac{\frac{۲۵}{۲}}{۲} = \frac{۲۵}{۴}$

(۱۰

$f(x) + f\left(\frac{۱}{x}\right) = \frac{۳x^۲ - ۱۲x + ۳}{x}$

$x = -۱ \to f(-۱) + f(-۱) = \frac{۳ + ۱۲ + ۳}{-۱} \to ۲f(-۱) = -۱۸ \to f(-۱) = \boxed{-۹}$