یازدهم و نیم شب (C)

بهار نیاوهی

Subject:

Date: / /

①

$\log_n^m = a \Rightarrow n^a = m$ $\log_{mn}^{m^2 n} = b \Rightarrow \log_{n^{a+1}}^{n^{2a+1}} = b \Rightarrow \frac{2a+1}{a+1}\cancel{\log_n^n}^{1} = b$

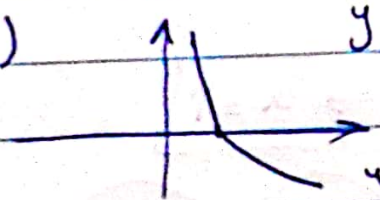
$[b] = \left[\frac{2a+1}{a+1}\right] \Rightarrow [b] = \left[\frac{a}{a+1} + 1\right] \rightarrow [b] = \left[\frac{a}{a+1}\right] + 1$

$a > 0$, $0 < \frac{a}{a+1} < 1$

$[b] = 0 + 1 = \boxed{1}$

②

الف)



$y = \sqrt{\frac{x}{\log_{\frac{1}{2}}^{x}}}$

$\left.\begin{matrix} x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}^{x} > 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow 0 < x < 1$

هیچ عدد صحیحی شامل نمی‌شود

ب) $y = \frac{\log_2^{(x^2-x-2)}}{\sqrt{x^2-1}+1} \Rightarrow \sqrt{x^2-1}+1 \neq 0 \rightarrow x^2-1 \geq 0 \,,\, x^2-x-2 > 0$

$\begin{array}{c|c|c} & -1 & 2 \\ \hline + & - & + \end{array}$

$x > 2$ یا $x < -1$

$x^2-1 \geq 0 \rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \text{یا} \\ x \leq -1 \end{cases}$ $\sqrt{x^2-1}+1 \neq 0$ ⟵ همیشه درسته

$\cap \Rightarrow (-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$

YASHA

Scanned with CamScanner

③

$$۲\log_{x}^{۹}+\log_{a}^{\sqrt{x}}=۲ \Rightarrow ۲\log_{۹}^{a}+\log_{a}^{\sqrt{۹}}=۲ \to \log_{۳}^{۹}+\log_{a}^{۳}=۲$$

$\log_{۳}^{a}=t$

$$\log_{۳}^{a}+\frac{۱}{\log_{۳}^{a}}=۲ \to t+\frac{۱}{t}=۲$$

$$\xrightarrow{\times t} t^{۲}-۲t+۱=۰ \Rightarrow t=۱$$

$$(t-۱)^{۲}=۰$$

$$\Rightarrow \log_{۳}^{a}=۱ \longrightarrow \boxed{a=۳}$$

④

$\log ۲ \simeq ۰٫۳$

$\log ۳ \simeq ۰٫۴$

$$(\log\tfrac{۵}{۳})x^{۲}+(\log ۹)x-\log ۱۵=۰$$

$$\hookrightarrow (\log ۵-\log ۳)x^{۲}+(۲\log ۳)x-\log ۵-\log ۳=۰$$

$$\hookrightarrow (\log ۵)x^{۲}-۰٫۴x^{۲}+۰٫۸x-\log ۵-۰٫۴=۰$$

$$\hookrightarrow (\log\tfrac{۱۰}{۲})x^{۲}-۰٫۴x^{۲}+۰٫۸x-\log\tfrac{۱۰}{۲}-۰٫۴=۰$$

$$\hookrightarrow (\log ۱۰-\log ۲)x^{۲}-۰٫۴x^{۲}+۰٫۸x-(\log ۱۰-\log ۲)-۰٫۴=۰$$

$\hookrightarrow$

$$\hookrightarrow (۱-۰٫۳)x^{۲}-۰٫۴x^{۲}+۰٫۸x-(۱-۰٫۳)-۰٫۴=۰$$

$$\hookrightarrow ۰٫۳x^{۲}+۰٫۸x-۱٫۱=۰ \longrightarrow x=-۱۱/۳ \quad x=۱ \quad \to ۱-(-\tfrac{۱۱}{۳})=\boxed{\tfrac{۱۴}{۳}}$$

YASHA

Subject: Date: / /

⑤

$\log_{۲}^{۷} = ۲٫۸$ $\log_{۵}^{۲} = ۰٫۵$ $\log_{۱۴}^{۱۰} = ?$

$$\frac{\log ۲}{\log ۵} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{\log ۲}{\log \frac{۱۰}{۲}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{\log ۲}{\log ۱۰ - \log ۲} = \frac{۱}{۲} \to \frac{\log ۲}{۱ - \log ۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow$$

$$\log ۲ = \frac{۱}{۳}$$

$$\frac{\log ۷}{\log ۲} = \frac{۲۸}{۱۰} \Rightarrow \frac{\log ۷}{\frac{۱}{۳}} = \frac{۲۸}{۱۰} \Rightarrow \log ۷ = \frac{۱۴}{۱۵}$$

$$\frac{۱}{\log ۱۴} = \frac{۱}{\log ۲ + \log ۷} = \frac{۱}{\frac{۱}{۳} + \frac{۱۴}{۱۵}} = \boxed{\frac{۱۵}{۱۹}}$$

⑥

$\log_{۳}^{۵} = ۱٫۵$ $\log_{۲}^{۳} = ۱٫۶$ $\log_{۱۵}^{۶} = ?$

$$\log_{۳}^{۵} \times \log_{۲}^{۳} = \log_{۲}^{۵} \to ۱٫۵ \times ۱٫۶ = ۲٫۴ \to \log_{۲}^{۵} = ۲٫۴$$

$$\log_{۱۵}^{۶} = \frac{\log_{۲}^{۶}}{\log_{۲}^{۱۵}} \Rightarrow \log_{۵}^{۶} = \frac{\log_{۲}^{۳} + \log_{۲}^{۲}}{\log_{۲}^{۳} + \log_{۲}^{۵}} = \frac{۱ + ۱٫۶}{۱٫۶ + ۲٫۴} = \frac{۲٫۶}{۴} = \boxed{۰٫۶۵}$$

YASHA

Subject: Date: / /

$\log_{۸} ۱۸ = m$ $\log_{۴} ۱۲ = \frac{\log_{۸} ۱۲}{\log_{۸} ۴}$ (۷)

$$\log_{۸} ۱۲ = \log_{۸} ۴ + \log_{۸} ۳ = \log_{۲^۳} ۲^۲ + \log_{۲^۳} ۳ =$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۳}\log_{۲} ۲ + \frac{۱}{۳}\log_{۲} ۳ = \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۳}\log_{۲} ۳$$

$$\log_{۸} ۴ = \log_{۲^۳} ۲^۲ = \frac{۲}{۳}\log_{۲} ۲ = \frac{۲}{۳}$$

$$\log_{۸} ۱۸ = m \Rightarrow \log_{۸} ۹ + \log_{۸} ۲ = m \rightarrow \log_{۲^۳} ۳^۲ + \log_{۲^۳} ۲ = m \rightarrow \frac{۲}{۳}\log_{۲} ۳ + \frac{۱}{۳}\log_{۲} ۲ = m$$

$$\frac{۲}{۳}\log_{۲} ۳ + \frac{۱}{۳} = m \rightarrow \log_{۲} ۳ = \frac{۳m-۱}{۲}$$

$$\log_{۴} ۱۲ = \frac{\frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۳}\log_{۲} ۳}{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow \frac{\frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۳}\left(\frac{۳m-۱}{۲}\right)}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۲ + \left(\frac{۳m-۱}{۲}\right)}{۲} = \frac{۴+۳m-۱}{۲}$$

$$\boxed{\frac{۳(m+۱)}{۴}} = \frac{۳m+۳}{۴}$$

Subject: Date: /   /

⑧

$۰/۴ = \frac{۲}{۵}$ $(۰/٤)^{۲x-۱} = \left(\frac{۱۲۵}{۸}\right)^{x^۲} \Rightarrow \left(\frac{۲}{۵}\right)^{۲x-۱} = \left(\left(\frac{۵}{۲}\right)^{۳}\right)^{x^۲}$

$\left(\frac{۲}{۵}\right)^{۲x-۱} = \left(\frac{۵}{۲}\right)^{۳x^۲} \Rightarrow \left(\frac{۵}{۲}\right)^{-۲x+۱} = \left(\frac{۵}{۲}\right)^{۳x^۲} \Rightarrow ۳x^۲ = -۲x+۱$

$۳x^۲ + ۲x - ۱ = ۰$

$x = -۱ \rightarrow$ ✗

$x = \frac{۱}{۳} \rightarrow$ ✓

$\log\left(۹\left(\frac{۱}{۳}\right)+۱\right) = \log_{۸}^{۴} = \log_{۲^۳}^{۲^۲}$

$\frac{۲}{۳}\log_{۲}^{۲} = \boxed{\frac{۲}{۳}}$

⑨

$\log_{۲}^{۳} = a$ $\log_{۸}^{b} = \frac{۲}{۳}(۱+a)$

$\log_{۸}^{b} = \frac{۲}{۳}(۱+\log_{۲}^{۳})$

$\log_{۸}^{b} = \frac{۲}{۳} + \frac{۲}{۳}\log_{۲}^{۳} \Rightarrow \log_{۸}^{b} = \frac{۲}{۳} + \log_{۸}^{۹}$

$\log_{۸}^{b} - \log_{۸}^{۹} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \log_{۸}^{b/۹} = ۲/۳ \rightarrow \frac{b}{۹} = ۸^{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow \frac{b}{۹} = \sqrt[۳]{۸^۲} \Rightarrow \frac{b}{۹} = ۴$

$b = ۳۶$

$\log(۳b-۱) = \log(۱۰۸-۸) = \boxed{\log ۱۰۰ = ۲}$

۱۵

$-۴ax^۲+bx+\frac{۱}{۲}c=۰$ $\quad \frac{۱}{\frac{-b}{-۴a}}=\log ۴ \Rightarrow \frac{۴a}{b}=\log ۴$

$\Rightarrow \frac{\log ۴}{۴}=\frac{a}{b}=\frac{۲\log ۲}{۴}=\frac{\log ۲}{۲}$ $\quad ۲a=b+c \Rightarrow ۲\frac{a}{b}=۱+\frac{c}{b}$

$\xrightarrow{\frac{a}{b}=\frac{\log ۲}{۲}} ۲\left(\frac{\log ۲}{۲}\right)=۱+\frac{c}{b} \to \frac{c}{b}=-۱+\log ۲$

$\begin{cases} \frac{c}{b}=\log ۲-۱ \\ \frac{a}{b}=\frac{\log ۲}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{-۱+\log ۲}{\frac{\log ۲}{۲}} \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{\log ۲-\log ۱۰}{\frac{۱}{۲}\log ۲} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\log \frac{۲}{۱۰}}{\frac{۱}{۲}\log ۲}=\frac{\log \frac{۱}{۵}}{\frac{۱}{۲}\log ۲}=\frac{\log \frac{۱}{۵}}{\log \sqrt{۲}}=\log_{\sqrt{۲}} \frac{۱}{۵}$

$\left(\frac{۱}{\sqrt[۸]{۲}}\right)^{\frac{c}{a}}=\left(\frac{۱}{\sqrt[۸]{۲}}\right)^{\log_{\sqrt{۲}} \frac{۱}{۵}}=\left(\frac{۱}{۵}\right)^{\log_{\sqrt{۲}} \frac{۱}{\sqrt[۸]{۲}}}$

$\left(\frac{۱}{۵}\right)^{\log_{۲^{\frac{۱}{۲}}} ۲^{-\frac{۱}{۸}}}=\left(\frac{۱}{۵}\right)^{\left(\frac{-\frac{۱}{۸}}{\frac{۱}{۲}}\right)\log_۲ ۲} \Rightarrow \left(\frac{۱}{۵}\right)^{-\frac{۱}{۴}}=۵^{\frac{۱}{۴}}=\sqrt[۴]{۵}$