تکلیف شماره ②　　　یازدهم ریاضی (۲)　　　عسل طاهری

سوال ۱ ←

$۲x^۲ + y^۲ - ۴x + ۶y + k = ۰$

$\to ۲x^۲ - ۴x = ۲(x^۲ - ۲x) = ۲((x-۱)^۲ - ۱)$

$\to y^۲ + ۶y = (y^۲ + ۶y + ۹) - ۹ = (y+۳)^۲ - ۹$

$\Rightarrow ۲(x-۱)^۲ - ۲ + (y+۳)^۲ - ۹ + k = \underbrace{۲(x-۱)^۲ + (y+۳)^۲}_{\text{در نقطه } (۱،-۳) \text{ برابر صفرند}} + k - ۱۱ = ۰$

$\Rightarrow k - ۱۱ = ۰ \to \boxed{k = ۱۱}$

سوال ۲ ←

$f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۴x & x \geq a \\ ۲x + a + ۲ & x < a \end{cases} \xrightarrow[\text{باهم برابرند}]{\text{هر دو به ازای } a} a^۲ + ۴a = ۲a + a + ۲$

$\to a^۲ + ۴a = ۳a + ۲ \to a^۲ + a - ۲ = ۰$

$\to a^۲ + a - ۲ = (a+۲)(a-۱) = ۰ \to a = ۱ \checkmark ,\ a = -۲ \times$

$f(۱) \to (۱)^۲ + ۴(۱) = \underline{۵}$

$۲(۱) + ۱ + ۲ = \underline{۵}$

سوال ۳ ←

$f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ - b & |x+۱| \geq ۲ \to \begin{matrix} x + ۱ \geq ۲ \to x \geq ۱ \\ x + ۱ \leq -۲ \to x \leq -۳ \end{matrix} \\ a + ۲x & -۳ < x < -۱ \end{cases}$

$\to ۲(-۳)^۲ - b = a + ۲(-۳) = ۱۸ - b = a - ۶ \Rightarrow a + b = \boxed{۲۴}$

سوال ۴ ←

$y = \sqrt{۶x - a} + \sqrt{b - ۳x} \Rightarrow \begin{cases} ۶x - a \geq ۰ \Rightarrow x \geq \frac{a}{۶} \\ b - ۳x \geq ۰ \Rightarrow x \leq \frac{b}{۳} \end{cases}$

$\to D_f = [\frac{a}{۶} ، \frac{b}{۳}] \to \frac{a}{۶} = \frac{b}{۳} = ۲ \to a = ۱۲ ,\ b = ۶ \to \frac{b}{a} = \frac{۶}{۱۲} = \boxed{\frac{۱}{۲}}$

سوال ۵ ←

الف) $y = \sqrt{\frac{x+۱}{|x-۳|}} + \sqrt{\frac{۶-x}{x^۲ + ۳x + ۴}}$ مثبت

① $\frac{x+۱}{|x-۳|} \geq ۰ \to$ مخرج $\to |x-۳| \to$ همواره $\to x - ۳ \neq ۰ \to x \neq ۳$

صورت $\to x + ۱ \geq ۰ \to x \geq -۱ \to$

-۱　　۳^*

$-$　۰　$+$　ت‌ن　$+$

② $\dfrac{6-x}{x^2+2x+4} \geq 0$

مخرج ← x^2+2x+4 ← چون دلتا کوچکتر از صفر است ریشه ندارد و همواره مثبت می باشد

صورت ← $6-x \geq 0 \rightarrow x \leq 6$

	6	
$+$	∅	$-$

$\xrightarrow{1 \cap 2} D_f = [-1, 6] - \{3\}$

ز) $\sqrt{[x]-4} + \sqrt{2-[x]} \rightarrow$
① $[x]-4 \geq 0 \rightarrow [x] \geq 4 \rightarrow x \geq 4$
② $2-[x] \geq 0 \rightarrow [x] \leq 2 \rightarrow x < 3$

$\xrightarrow{1 \cap 2} \varnothing \rightarrow D_f = \varnothing$

سوال ۶ ←

الف) $y = \sqrt{\dfrac{x^2-x+6}{x^4-13x^2+36}} = \sqrt{\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)}}$

$\rightarrow \dfrac{\overset{3}{(x-3)}\overset{-2}{(x+2)}}{\underset{3}{(x-3)}\underset{-3}{(x+3)}\underset{2}{(x-2)}\underset{-2}{(x+2)}} \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$

	-3		$\overset{\star}{-2}$		2		$\overset{\star}{3}$	
$+$	∅	$-$	∅	$-$	∅	$+$	0	$+$

$\rightarrow D_f = (-\infty, -3) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$

ب) $\sqrt{\dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{x^3+2x^2-5x-6}} = \dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{x^3+2x^2-5x-6} \geq 0$

① $x^3-2x^2-5x+6 \longrightarrow$ چون مجموع ضرایب صفر است بر $x-1$ بخش پذیر است

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2-5x+6 & x-1 \\ \hline -x^3+x^2 & x^2-x-6 \\ \hline -x^2-5x+6 & \\ +x^2-x & \\ \hline -6x+6 & \end{array}$$

$\rightarrow (x-1)(x^2-x-6) = (x-1)(x-3)(x+2)$

② $x^3+2x^2-5x-6 \longrightarrow$ چون مجموع ضرایب با توان زوج با مجموع ضرایب با توان فرد برابر است بر $x+1$ بخش پذیر است

$$\begin{array}{r|l} x^3+2x^2-5x-6 & x+1 \\ \hline -x^3-x^2 & x^2+x-6 \\ \hline x^2-5x-6 & \\ -x^2-x & \\ \hline -6x-6 & \end{array}$$

$\rightarrow (x+1)(x^2+x-6) = (x+1)(x+3)(x-2)$

$\xrightarrow{1,2} \frac{(x-1)(x-3)(x+2)}{(x+1)(x+3)(x-2)} \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$

	-3		-2		-1		1		2		3	
$+$		$-$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$

$\to D_f = (\infty, -3) \cup [-2, -1) \cup [1, 2) \cup [3, +\infty)$

الف) $y = \sqrt{[-x]-2} \to [-x]-2 \geq 0 \to [-x] \geq 2$ ← سوال ۷

$\to x \leq -2 \to D_f = (-\infty, -2]$

ب) $\frac{5x^2+6}{[x]^2-2[x]-3} \to$ صورت $\to$ محدودیت ندارد

می تواند هر عددی را پیدا کند

مخرج $\to [x]^2-2[x]-3 = ([x]-3)([x]+1)$

$[x] \neq 3 \to [3, 4)$

$[x] \neq -1 \to [-1, 0)$

$\to D_f = \mathbb{R} - \{[-1, 0) \cup [3, 4)\}$

الف) $y = \frac{\cot x + 1}{\tan x + 1}$ ← سوال ۸

$\cot x \xrightarrow{\text{تعریف نشده نباشد}} \sin x \neq 0 \to x \neq K\frac{\pi}{2}$

$\tan x + 1 \to \tan x + 1 \neq 0 \to \tan x \neq -1 \to K\pi + \frac{\pi}{4}$

$\cos x \neq 0 \to K\pi + \frac{\pi}{2}$

$\to D_f = \mathbb{R} - \{\frac{K\pi}{2}, K\pi - \frac{\pi}{4}\}$

ب) $= \sqrt{1-4\sin^2 x} \to 1 - 4\sin^2 x \geq 0 \to 4\sin^2 x \leq +1$

$\to \sin^2 x \leq \frac{1}{4} \to -\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{1}{2} \to D_f = [K\pi + \frac{\pi}{6}, K\pi - \frac{\pi}{6}]$

الف) $y = \sqrt{1 - \log_{\frac{1}{2}}^{x-1}} \to$ ① $1 - \log_{\frac{1}{2}}^{x-1} \geq 0$ ← سوال ۹

$\log_{\frac{1}{2}}^{x-1} \leq 1 \to x - 1 \geq \frac{1}{2} \to x \geq \frac{3}{2}$

② $x - 1 > 0 \to x > 1$ $\xrightarrow{1 \cap 2} x \geq \frac{3}{2} \to D_f = [\frac{3}{2}, +\infty)$

ب) $y = \dfrac{\sqrt{x^۲ - x}}{۱ - \log_۴^{x^۲ - ۳x}}$ ← صورت ← $x^۲ - x \geq ۰ \rightarrow x(x-۱) \geq ۰ \rightarrow \begin{array}{ccccc} & ۰ & & ۱ & \\ \hline + & \phi & - & \phi & + \end{array}$

مخرج ← $۱ - \log_۴^{x^۲ - ۳x} \neq ۰ \rightarrow ۱ \neq \log_۴^{x^۲ - ۳x}$

$\rightarrow x^۲ - ۳x = ۴ \rightarrow x^۲ - ۳x - ۴ \neq ۰ \rightarrow (x-۴)(x+۱) \neq ۰ \rightarrow x \neq -۱ \quad x \neq ۴$

$x^۲ - ۳x > ۰ \rightarrow (x-۳)(x) > ۰ \rightarrow \begin{array}{ccccc} & ۰ & & ۳ & \\ \hline + & \phi & - & \phi & + \end{array}$

$\Longrightarrow D_f = (-\infty, -۱) \cup (-۱, ۰) \cup (۳, ۴) \cup (۴, +\infty)$

سوال ۱۰ ←

الف) $y = \sqrt{۲^{۴x - x^۲} - ۸} \rightarrow ۲^{۴x - x^۲} - ۸ \geq ۰ \rightarrow ۲^{۴x - x^۲} \geq \cancel{۸}\, ۲^۳$

$\rightarrow ۴x - x^۲ \geq ۳ \rightarrow x^۲ - ۴x + ۳ \leq ۰ \rightarrow (x-۱)(x-۳) \leq ۰$

$\rightarrow \begin{array}{ccccc} & ۱ & & ۳ & \\ \hline + & \phi & - & \phi & + \end{array} \rightarrow D_f = [۱, ۳]$

ب) $\left(\dfrac{۳x + ۵}{۲x + ۴}\right)! \rightarrow \dfrac{۳x + ۵}{۲x + ۴} \in W \rightarrow ۲xW + ۴W = ۳x + ۵$

$۲xW - ۳x = ۵ - ۴W$

$\rightarrow x = \dfrac{۵ - ۴W}{۲W - ۳}$

$\rightarrow D_f = \left\{ x \mid x = \dfrac{۵ - ۴K}{۲K - ۳}, K \in W \right\}$