دهم دفتر C — سها جهدی

①

$۲x^۲ + y^۲ - ۴x + ۶y + k = ۰ \rightarrow$ تابع ناقص , $k = ?$

$۲(x^۲ - ۲x + ۱) + (y^۲ + ۶y + ۹) = ۰ \rightarrow k = ۲ + ۹ = ۱۱$

$۲(x-۱)^۲ + (y+۳)^۲ \xrightarrow{\text{نقطه‌ای}} (۱, -۳)$

---

②

$f(a) = a^۲ + ۴a = ۲a + a + ۲ \rightarrow a^۲ + a - ۲ = ۰ \rightarrow (a+۲)(a-۱)$

$\hookrightarrow a = ۱ \quad a > ۰$

$$\rightarrow f(x) \begin{cases} x^۲ + ۴x & x \geq ۱ \\ ۲x + ۳ & x \leq ۱ \end{cases} \rightarrow f(۱) = ۱ + ۴ = \boxed{۵}$$

$\overset{b}{۲} + ۳ = \boxed{۵}$

---

③

$$f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ - b & : |x+۱| \geq ۲ \rightarrow x+۱ \geq ۲ \rightarrow x \geq ۱ \\ & \quad\; x+۱ \geq -۲ \rightarrow x \geq -۳ \\ a + ۲x & : -۳ \leq x < -۱ \end{cases}$$

$f(-۳) \rightarrow a - ۶ = ۱۸ - b$

$\rightarrow a + b = ۲۴$

---

④

$y = \sqrt{۶x - a} + \sqrt{b - ۳x}$

$۶x - a \geq ۰ \rightarrow x \geq \frac{a}{۶}$

$b - ۳x \geq ۰ \rightarrow x \leq \frac{b}{۳}$

$\frac{a}{۶} = \frac{b}{۳} = ۲ \rightarrow a = ۱۲, \; b = ۶$

$\rightarrow \frac{b}{a} = \frac{۶}{۱۲} = \frac{۱}{۲}$

---

⑤

الف) $\sqrt{\frac{x+۱}{|x-۳|}} + \sqrt{\frac{۶-x}{x^۲+۲x+۴}} \rightarrow ۶ - x \geq ۰ \rightarrow x \leq ۶ \rightarrow (-\infty, ۶]$ ①

$\hookrightarrow \Delta = ۴ - ۱۶ = -۱۲, \; a > ۰$ همواره +

$\frac{x+۱}{|x-۳|} \geq ۰ \rightarrow$ (-۱, ۳ : $-$ ۰ $+$ ∄ $+$)

$\rightarrow [-۱, +\infty) - \{۳\}$ ②

$\rightarrow$ ① $\cap$ ② $\rightarrow D_f = [-۱, ۶] - \{۳\}$

ب) $y = \sqrt{[x] - ۴} + \sqrt{۲ - [x]}$

$[x] - ۴ \geq ۰ \rightarrow [x] \geq ۴$ $\qquad$ $۲ - [x] \geq ۰ \rightarrow [x] < ۲$

$[۴, +\infty) \cap (-\infty, ۲) \rightarrow D_f = \varnothing$

۶

الف) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-x-6}{x^4-13x^2+36}}$ $\to (x-3)(x+2)$

$\hookrightarrow x^2=t \to t^2-13t+36=0$

$\hookrightarrow (t-4)(t-9)$

$t^2 = +4 , 9$

$\hookrightarrow x=\pm 2 , \pm 3$

-3		-2^{*}		2		3^{*}	
+		−		−	+		+

$\hookrightarrow D_y=(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)-\{3\}$

ب) $y=\sqrt{\dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{x^3+2x^2-5x-6}}$ $\to 1-2-5+6=0 \to$ بخش پذیر $x-1$

$\to x+1$

$$\begin{array}{l|l} x^3-2x^2-5x+6 & x-1 \\ -x^3+x^2 & x^2-x-6 \\ \hline -x^2-5x+6 & \\ +x^2-x & \\ \hline -6x+6 & \\ +6x-6 & \end{array}$$

$\nearrow x=1,3,-2$

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2-5x-6 & x+1 \\ -x^3-x^2 & x^2+x-6 \\ \hline x^2-5x-6 & \\ -x^2-x & \\ \hline -6x-6 & \\ +6x+6 & \end{array}$$

$\nearrow x=-1,-3,2$

-3	-2	-1	1	2	3
+	−	+	−	+	−	+

$\downarrow$

$D_y=(-\infty,-3)\cup[-2,-1)\cup[1,+2)\cup[3,+\infty)$

۷

الف) $y=\sqrt{[-x]-2}$ $\to$ $[-x]\geq 2 \to D_y=(-\infty,-2]$

ب) $y=\dfrac{5x^2+6}{[x]^2-2[x]-3}$ $\to [x]=t \to t^2-2t-3 \to a+c=b$

$\to t=3,-1$

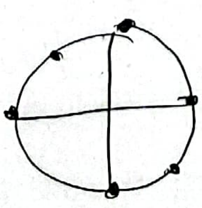
$\to [x]=3 \to [3,4)$

$[x]=-1 \to [-1,0)$

$\hookrightarrow D_y=\mathbb{R}-[-1,0)\cup[3,4)$

۸

الف) $y=\dfrac{\cot x+1}{\tan x+1} \to y=\dfrac{\dfrac{\cos x+\sin x}{\sin x}}{\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos x}}$



$\sin x\neq 0$

$\sin x+\cos \neq 0$

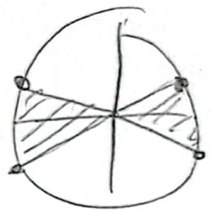
$\sin \neq -\cos x$

$\cos x\neq 0 \to D_y=\mathbb{R}-\{k\pi+3\dfrac{\pi}{4}\}\cup$

$\mathbb{R}\{\dfrac{k\pi}{2}$

(الف) $y = \sqrt{1-4\sin^2 x} \geq 0 \rightarrow \sin^2 x \leq \frac{1}{4} \rightarrow \sin x \geq -\frac{1}{2}$ ۸

$\sin x \leq \frac{1}{2}$



$\rightarrow D_y = [\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}] \cup [\frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$

(الف) $y = \sqrt{1-\log_{\frac{1}{2}}^{x-1}}$ ۹

$x-1 > 0 \rightarrow x > 1$ (1)

$1-\log_{\frac{1}{2}}^{x-1} \geq 0 \rightarrow \log_{\frac{1}{2}}^{x-1} \leq 1 \rightarrow x-1 \geq \frac{1}{2} \rightarrow x \geq \frac{3}{2}$ (2)

$(1) \cap (2) \rightarrow D_g = [\frac{3}{2}, +\infty)$

ب) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - x}}{1 - \log_4^{x^2-3x}} \to x^2 - x \geq 0 \to x(x-1) \geq 0$ $\quad \underset{+\quad -\quad +}{0 \quad 1}$

$(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ ①

$\to 1 - \log_4^{x^2-3x} \neq 0 \to \log_4^{x^2-3x} \neq 1 \to x^2 - 3x \neq 4$

$\to x^2 - 3x - 4 \neq 0 \to (x-4)(x+1) \neq 0 \to x \neq 4, -1$ ②

$x^2 - 3x > 0 \to x(x-3) > 0$ $\quad \underset{+\quad -\quad +}{0 \quad 3}$ $\quad (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ ③

$\xrightarrow{① \cap ② \cap ③} D_f = (-\infty, 0) \cup (3, +\infty) - \{4, -1\}$

۱۵)

الف) $y = \sqrt{2^{4x-x^2} - 8} \to 2^{4x-x^2} - 8 \geq 0$

$\to 2^{-x^2+4x} \geq 8 \to -x^2 + 4x \geq 3 \to x^2 - 4x + 3 \leq 0$

$(x-1)(x-3) \leq 0$

$\underset{+\quad -\quad +}{1 \quad 3}$ $\quad D_f = [1, 3]$

ب) $y = \left(\dfrac{3x+5}{2x+4}\right)!$ $\qquad \dfrac{3x+5}{2x+4} \in W \to \dfrac{-4W+5}{2W-3}$

$\to \{x \mid x = \dfrac{-4k+5}{2k-3}, k \in W\}$