(۱)

$\alpha = 3\beta \rightarrow \alpha + \beta = 4\beta \xrightarrow{\alpha+\beta = \frac{-b}{a}} 4\beta = \frac{a}{3}$

$\alpha \times \beta = 3\beta^2 \qquad 3\beta^2 = \frac{4}{3} \rightarrow \beta^2 = \frac{4}{9} \rightarrow \beta = \pm\frac{2}{3}$

$\xrightarrow{\beta = \frac{2}{3}} \alpha = 3 \times \frac{2}{3} = 2 \qquad 2 + \frac{2}{3} = \frac{a}{3} \Rightarrow \frac{8}{3} = \frac{a}{3} \rightarrow a_1 = 8$

$\xrightarrow{\beta = \frac{-2}{3}} \alpha = 3 \times \frac{-2}{3} = -2 \qquad -2 - \frac{2}{3} = \frac{a}{3} \Rightarrow \frac{-8}{3} = \frac{a}{3} \rightarrow a_2 = -8$

$a_1 - a_2 = 8 - (-8) = 16$

(۲)

$\sqrt{\frac{1}{\alpha}} + \sqrt{\frac{1}{\beta}} = 5 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = 5 \Rightarrow \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} = 5 \rightarrow \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\frac{1}{6}} = 5$

$\boxed{\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{36} \qquad \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{m+14}{36}} \rightarrow \alpha + \beta + 2\sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{25}{36}$

$\Rightarrow \frac{m+14}{36} = \frac{25}{36} - \frac{12}{36} = \frac{13}{36} \Rightarrow m + 14 = 13 \rightarrow m = -1$

$mx^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow -x^2 + 3x + 2 = 0 \qquad \frac{c}{a} = -2$

(۳)

$(\alpha+\beta)^2 = 1 \rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = 1 \rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha^2 + \beta^2 = 5 \\ \alpha + \beta = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \end{array}$

$4 \times (-1)^3 + k + 9 - 2 = 0 \rightarrow \boxed{k = -3}$ ✓

$4 \times 8 + 4k - 18 - 2 = 0 \rightarrow \boxed{k = -3}$ ✓

DATE / / SUBJECT:

$$۳\alpha^۲ + ۲\alpha^۲ = ۲/۵\alpha^۲ + ۲/۵\beta^۲ + ۰/۵\alpha^۲ - ۰/۵\beta^۲$$ ۴

$$\frac{۵}{۲}(\alpha^۲+\beta^۲) + \frac{۱}{۲}(\alpha^۲+\beta^۲) \qquad \alpha^۲+\beta^۲ = S^۲ - ۲P \to ۳۶ - ۲a$$

$$\alpha^۲+\beta^۲ = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = -۶(-\sqrt{۳۶-۴a}) = ۶\sqrt{۳۶-۴a}$$

$$\frac{۵}{۲}(\alpha^۲+\beta^۲) + \frac{۱}{۲}(\alpha^۲-\beta^۲) \to ۹۰ - ۵a + ۳\sqrt{۳۶-۴a} = ۱۲\sqrt{۲} + ۸۵$$

$$۹۰ - ۵\alpha = ۸۵ \to \alpha = ۱ \qquad ۳\sqrt{۳۶-۴\alpha} = ۱۲\sqrt{۲} \Rightarrow \boxed{a=۱}$$

$$x^۲ = t \qquad x^۴ - ۷x^۲ - ۵ = ۰ \to t^۲ - ۷t - ۵ = ۰$$ ۵

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} \to t = \frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲} \to x = \pm\sqrt{\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}} \to S = ۰$$

$$P = \frac{-۷-\sqrt{۶۹}}{۲}$$

$$t = \frac{۷-\sqrt{۶۹}}{۲} \to$$ غ ق ق

چون منفی است و t مثبت است.

$$۲P^۲ - \cancel{۳PS} + \cancel{۲S} = \left(\frac{-۷-\sqrt{۶۹}}{۲}\right)^۲ \times ۲ = \frac{۴۹+۶۹+۱۴\sqrt{۶۹}}{۴} \times ۲ = \boxed{۵۹ + ۷\sqrt{۶۹}}$$

$$۲ax^۲ + ax - ۶ = ۰ \to$$ ریشه‌ها $\to \alpha, \beta \to \alpha+\beta = \frac{-۱}{۲}, \ \alpha \times \beta = \frac{-۳}{a}$ ۶

$$۲x^۲ - ax + b = ۰ \to \alpha + \frac{۱}{۲} + \beta + \frac{۱}{۲} = \frac{a}{۲} \to \alpha + \beta + ۱ = \frac{a}{۲}$$

$$\to \alpha + \beta = \frac{a-۲}{۲} \Rightarrow a = ۱$$

$$\left(\frac{۱}{۲}+\alpha\right)\left(\frac{۱}{۲}+\beta\right) = \frac{۱}{۴} + \underbrace{(\alpha+\beta)}_{\frac{-۱}{۲}}\frac{۱}{۲} + \underbrace{\alpha\beta}_{-۳} = \frac{b}{۲} \to \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴} - \frac{۱۲}{۴} = \frac{b}{۲}$$

$$\to b = -۶$$

$$\left[\frac{ab}{۴}\right] = \left[\frac{۱\times -۶}{۴}\right] = \left[\frac{-۳}{۲}\right] = -۲$$

Sahand

DATE / / SUBJECT:

(۷)

$ax^۲ - ax - b = ۰ \xrightarrow{x=\alpha} \alpha^۲ - a\alpha - b = ۰$

$\rightarrow S = ۱$

$\rightarrow P = \frac{-b}{a}$

$\xrightarrow{x=\beta} \beta^۲ - a\beta - b = ۰ \longrightarrow \beta^۲ - \beta = \frac{b}{a}$

$۴۰\beta^۲ + ۲۰\alpha^۲ - ۲۰\beta = ۲۰\beta^۲ + ۲۰\alpha^۲ + ۲۰\beta^۲ - ۲۰\beta$

$۲۰(S^۲ - ۲P) + ۲۰(\beta^۲ - \beta) \rightarrow ۲۰\left(۱ + \frac{۲b}{a}\right) + ۲۰\left(\frac{b}{a}\right) = ۲۰ + ۴۰\frac{b}{a} + ۲۰\frac{b}{a}$

$= ۲۰ + ۶۰\frac{b}{a} = ۱۷ \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{-۱}{۲۰}$

اختلاف ریشه $= \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{a^۲ + ۴ab}}{|a|} = \frac{\sqrt{a^۲ - \frac{a^۲}{۵}}}{|a|} = \frac{\cancel{|a|}\sqrt{\frac{۴}{۵}}}{\cancel{|a|}} = \sqrt{\frac{۴}{۵}} = \frac{۲}{\sqrt{۵}} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$

---

(۸)

$x^۲ - (a+۱)x + a = ۰ \longrightarrow$ ریشه: $۲m+۱ \,,\, ۲m-۱$

$x^۲ - (۳a+۱)x + b = ۰ \longrightarrow$ ریشه: $۲n \,,\, ۲n+۲$

$a = ۲m+۱ \times ۲m-۱ = ۴m^۲ - ۱$

$a + ۱ = ۴m \rightarrow a = ۴m - ۱$

$\Rightarrow ۴m^۲ - ۱ = ۴m - ۱ \rightarrow m^۲ - m = ۰ \rightarrow m(m-۱) = ۰ \rightarrow m = ۱$

$\rightarrow m = ۰$

$\boxed{a = ۳}$

$b = ۴n^۲ + ۴n$

$|b - a| = |۲۴ - ۳| = ۲۱$

$۳a + ۱ = ۴n + ۲ \rightarrow ۱۰ = ۴n + ۲ \rightarrow n = ۲ \rightarrow \boxed{b = ۲۴}$

---

(۹)

$\alpha + \beta = -۱ \qquad \alpha \times \beta = -۱ - m^۲$

$\alpha^۲ + \beta^۲ = S^۲ - ۲P = ۱ - ۲(-m^۲ - ۱) = ۳ + ۲m^۲ \qquad m^۲ = ۰$

$۳ + ۲m^۲ \xrightarrow{m=۰} ۳$

Sahand

10

$S \left| \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} \right.$ $\quad y = a(x+1)^2 + 1 \xrightarrow{(x,0)} 0 = a(x^2 + 1 + 2x) + 1$

$\longrightarrow 0 = ax^2 + 2ax + a + 1 \qquad \alpha + \beta = \frac{-2a}{a} = -2 \qquad \alpha \times \beta = \frac{a+1}{a}$

$(\alpha+\beta)^2 = \underbrace{\alpha^2 + \beta^2}_{5} + 2\alpha\beta = 4 \longrightarrow 2\alpha\beta = -1 \longrightarrow \alpha\beta = \frac{-1}{2}$

$\frac{a+1}{a} = \frac{-1}{2}$

$\hookrightarrow a = \frac{-2}{3}$

$y = \frac{-2}{3}(x+1)^2 + 1 \xrightarrow{x=0} y = \frac{-2}{3} + 1 \longrightarrow \boxed{y = \frac{1}{3}}$

Scanned with CamScanner