یازدهم دختر — حسن پاکزاد — تکلیف شماره ۵

(۱

$$a^3-4 \geq 12a-20 \rightarrow a^3-12a+16 \geq 0 \rightarrow (a^3+12a-6a^2-8)-24a+24+6a^2 \geq 0$$

$$(a-2)^3+6(a^2-4a+4)=(a-2)^3+6(a-2)^2=(a-2)^2(a-2+6)$$

$$=(a-2)^2(a+4)=0 \rightarrow a=-4 \quad a=2 \Longrightarrow \boxed{a \geq -4}$$

(۲

$$f^{-1}_{(2)}=4 \rightarrow f_{(4)}=2 \qquad f_{(4)}=3\times 4+k=2 \rightarrow k=-10 \rightarrow f_{(x)}=3x-10$$

الف) $f_{(7)}=3\times 7-10=11$

ب) $f(f_{(x)})=f(3x-10)=3\times(3x-10)-10=\boxed{9x-40}$

(۳ وقتی $(2a,a)$ روی وارون تابع است یعنی $(a,2a)$ روی خود تابع است.

$$2a=\frac{a\times a}{a-1} \Rightarrow 2a^2-2a=a^2 \rightarrow a^2-2a=0 \rightarrow a(2-a)=0 \rightarrow a=0 \text{ غ‌ق‌ق} \quad \boxed{a=2}$$

(۴

$$f^{-1}=\{(5,3),(7,4),(2,7),(6,9)\}$$

$$g^{-1}=\{(2,3),(6,8),(5,9)\}$$

الف) $fof^{-1}=\{(5,5),(7,7),(2,2),(6,6)\}$

ب) $f^{-1}of=\{(3,3),(4,4),(7,7),(9,9)\}$

ج) $fog^{-1}=\{(2,5),(5,6)\}$

د) $g^{-1}of=\{(3,9),(7,3),(9,8)\}$

(۵

$$g^{-1}=\{(1,2),(3,4),(5,6)\}$$

$$fog^{-1}=\{(1,4),(3,8),(5,0)\}$$

$$\frac{h}{fog^{-1}}=\{(1,\frac{2}{4}),(3,\frac{4}{8}),\cancel{(5,\frac{0}{1})}\}=\boxed{\{(1,\frac{1}{2}),(3,\frac{1}{2})\}}$$

حل

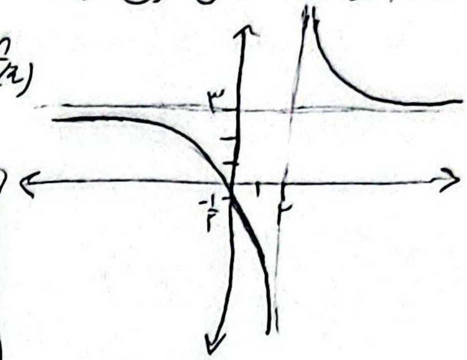
Scanned with CamScanner

۶

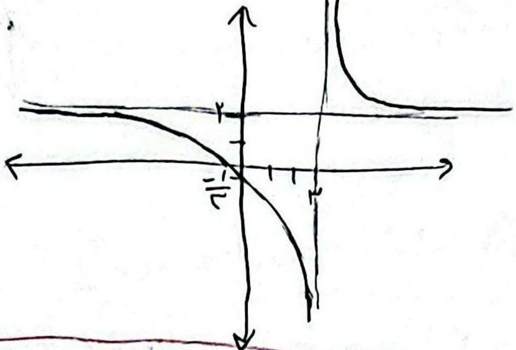
$$y=\frac{3x+1}{x-2}\to\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow ad\neq bc\to 3(-2)\neq 1\to$$ هموگرافیک ← یک به یک

که قابلیت معکوس شدن دارد.

$f(x)$ ← با توجه به شکل تابع هم متوجه می‌شویم که یک به یک است.



$$f^{-1}(x)\Rightarrow y=\frac{2x+1}{x-3}\xrightarrow{x=0}y=\frac{-1}{3}$$



۷

	1		3	
$-x+1-x-3$		$x-1+x-3$		$x-1-x+3$
-2		$2x-4$		2
	-2		2	

$[a,b]\to[1,3]$

$y=2x-4$

$2x=y+4$

$x=\frac{y+4}{2}\to\boxed{y=\frac{1}{2}x+2}$

۸

$$f(x)=\begin{cases}x^3+4 & x\geq 1 \quad R=[5,+\infty)\\ 4x-1 & x\leq 0 \quad R=(-\infty,-1]\end{cases}\Rightarrow$$ وارون پذیر ← یک به یک

$$y=x^3+4\to x^3=y-4\to x=\sqrt[3]{y-4}\to y=\sqrt[3]{x-4}$$

$$y=4x-1\to 4x=y+1\to x=\frac{y+1}{4}\to y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$$

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x-4} & x\geq 5\\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{4} & x\leq -1\end{cases}$$

(9)

$$x^2-\frac{(x+1)^3}{x+3}=x^2-\frac{(x^3+3x^2+3x+1)}{x+3}=\frac{x^3+3x^2-x^3-3x^2+3x+1}{x+3}$$

$$=\frac{3x+1}{x+3}$$

$$f(x)=\frac{3x+1}{x+3} \qquad f^{-1}(x)\Rightarrow y=\frac{-3x-1}{x+3}=\frac{-6x-2}{2x+6}$$

$$f^{-1}(-2)=\frac{-3(-2)-1}{-2+3}=\boxed{5}$$

$a=-6$
$b=-2$
$d=6$

---

(10)

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}\Rightarrow x=\frac{y}{y^2+1}\Rightarrow xy^2+x=y\rightarrow xy^2-y+x=0$$

$$y=\frac{+1\pm\sqrt{1-4x^2}}{2x} \qquad 1-4x^2=0 \rightarrow x=\frac{1}{2},\ x=\frac{-1}{2}$$

$\frac{-1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$-$	$+$		$-$

$$f^{-1}(x)=\frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x}$$

چون x و y هم علامت هستند پس $-\sqrt{\Delta}$ غیرقابل قبول است

$$D_{f^{-1}(x)}=\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]-\{0\}$$