یازدهم دختران — تکلیف شماره ی ۲۰

۱)
$$a^3-4 \geq 12a-20 \rightarrow a^3-12a+16 \geq 0 \rightarrow (a^3+12a-6a^2-8)-24a+24+6a^2 \geq 0$$
$$(a-2)^3+6(a^2-4a+4) = (a-2)^3+6(a-2)^2 = (a-2)^2(a-2+6)$$
$$=(a-2)^2(a+4)=0 \rightarrow a=-4,\ a=2 \Longrightarrow \boxed{a \geq -4}$$

۵

---

۲)
$$f^{-1}_{(2)}=4 \rightarrow f_{(4)}=2 \qquad f_{(4)}=3\times 4+k=2 \rightarrow k=-10 \rightarrow f_{(x)}=3x-10$$

الف) $f_{(7)}=3\times 7-10=11$

ب) $f(f_{(x)})=f_{(3x-10)}=3\times(3x-10)-10=\boxed{9x-40}$

۵

---

۳) وقتی $(2a,a)$ روی وارون تابع است یعنی $(a,2a)$ روی خود تابع است.

$$2a=\frac{a\times a}{a-1} \Rightarrow 2a^2-2a=a^2 \rightarrow a^2-2a=0 \rightarrow a(2-a)=0 \rightarrow a=0 \text{ غ‌ق‌ق},\ \boxed{a=2}$$

۵

---

۴)
$$f^{-1}=\{(5,3),(7,4),(2,7),(6,9)\}$$
$$g^{-1}=\{(2,3),(6,8),(5,9)\}$$

الف) $fof^{-1}=\{(5,5),(7,7),(2,2),(6,6)\}$

ب) $f^{-1}of=\{(3,3),(4,4),(7,7),(9,9)\}$

ج) $fog^{-1}=\{(2,5),(5,6)\}$

د) $g^{-1}of=\{(3,9),(7,3),(9,8)\}$

۵

---

۵)
$$g^{-1}=\{(1,2),(3,4),(5,6)\}$$
$$fog^{-1}=\{(1,4),(3,8),(5,0)\}$$

۵

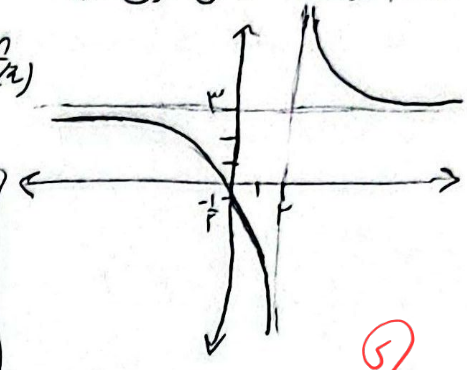
$$\frac{h}{fog^{-1}}=\{(1,\tfrac{2}{4}),(3,\tfrac{4}{8}),\cancel{(5,\tfrac{1}{0})}\}=\boxed{\{(1,\tfrac{1}{2}),(3,\tfrac{1}{2})\}}$$
حذف

(۶)

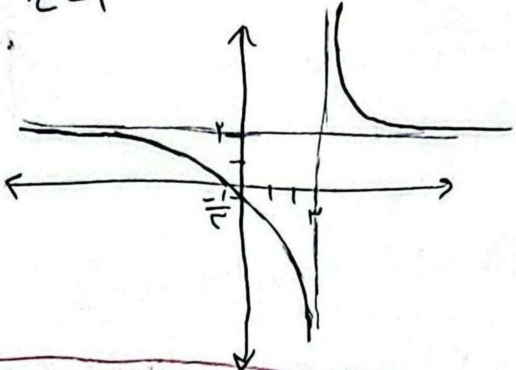
$y=\frac{3x+1}{x-2} \to \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow ad\neq bc \to 3(-2)\neq 1 \to$ هموگرافیک $\to$ یک به یک

پس قابلیت معکوس شدن دارد.

$f(x) \Leftarrow$ با توجه به شکل تابع هم متوجه می‌شویم که یک به یک است.



$f^{-1}(x) \Rightarrow y=\frac{2x+1}{x-3} \xrightarrow{x=0} y=\frac{-1}{3}$



(۷)

$-x+1-x-3$	$x-1+x-3$	$x-1-x+3$
-2	$2x-4$	2

(-2) $\quad$ (2)

$[a,b] \to [1,3]$

$y=2x-4$

$2x=y+4$

$x=\frac{y+4}{2} \to \boxed{y=\frac{1}{2}x+2}$

(۸)

$f(x)=\begin{cases} x^3+4 & x\geq 1 \quad R=[5,+\infty) \\ 4x-1 & x\leq 0 \quad R=(-\infty,-1] \end{cases} \Longrightarrow$ وارون پذیر $\to$ یک به یک

$y=x^3+4 \to x^3=y-4 \to x=\sqrt[3]{y-4} \to y=\sqrt[3]{x-4}$

$y=4x-1 \to 4x=y+1 \to x=\frac{y+1}{4} \to y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$

$f^{-1}(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x-4} & x\geq 5 \\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{4} & x\leq -1 \end{cases}$

$$x^2 - \frac{(x+1)^3}{x+3} = x^2 - \frac{(x^3+3x^2+3x+1)}{x+3} = \frac{x^3+3x^2-x^3-3x^2+3x+1}{x+3}$$ ۹

$$= \frac{3x+1}{x+3}$$

۵

$$f_{(x)} = \frac{3x+1}{x+3} \qquad f^{-1}_{(x)} \Rightarrow y = \frac{-3x-1}{x+3} = \frac{-6x-2}{2x+6}$$

$$f^{-1}_{(-2)} = \frac{-3(-2)-1}{-2+3} = \boxed{5}$$

$a = -6$
$b = -2$
$d = 6$

۱۰

$$f_{(x)} = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow x = \frac{y}{y^2+1} \Rightarrow xy^2 + x = y \rightarrow xy^2 - y + x = 0$$

$$y = \frac{+1 \pm \sqrt{1-4x^2}}{2x} \qquad 1-4x^2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2},\ x = \frac{-1}{2}$$

	$\frac{-1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$-$	0	$+$	0	$-$

$$f^{-1}_{(x)} = \frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x}$$

چون x و y هم علامت هستند پس $-\sqrt{\Delta}$ غیرقابل قبول است

۵

$$D_{f^{-1}(x)} = \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right] - \{0\}$$

Scanned with CamScanner