یازدهم ۳ دختر — تکلیف شماره ۱۱ — پارمیس عباسیان ۲۰

1.

$$f(x) = \begin{cases} x^3-4 & , x>a \to a^3-4 \\ 12x-20 & , x\le a \to 12a-2 \end{cases}$$

$$a^3-4 \ge 12a-20$$

$$\to a^3-12a+16 \ge 0$$

$$(a-2)(a^2+2a-8) \ge 0 \to (a-2)(a+4)(a-2) \ge 0$$

$$(a+4)(a-2)$$

	-4		2	
$-$		$+$		$+$

$$\to a \ge -4$$

۳

2. الف) $f(x) = 3x+k \quad , f^{-1}=(2)=4$

$$f^{-1}(x) = x = 3y+k \to 3y = x-k \to y = \frac{\overset{2}{\cancel{x}}-k}{3} = 4 \to k=-10$$

$$f(7) = 21-10 = 11$$

ب) $f(f(x)) = 9x-40$

$$3(3x-10)-10 = 9x-30-10 \to 9x-40.$$

۲

3. $f(x) = \frac{ax}{x-1} \to f^{-1}(x) = x = \frac{ya}{y-1} = y = \frac{ax}{x-a}$

$$A=\begin{bmatrix} 2a \\ a \end{bmatrix} \to \frac{2\cancel{a}}{\cancel{2a}-a} = a = \boxed{a=2}$$

۲

4. $fof^{-1} = \{(5,5),(2,2),(7,7),(6,6)\}$

$$f^{-1}of = \{(3,3),(4,4),(7,7),(9,9)\}$$

$$fog^{-1} = \{(6,5)(5,4)\}$$

$$g^{-1}of = \{(3,9),(7,3),(9,8)\}$$

۲

۵. $f = \{(۲,۴),(۴,۸),(۶,۰)\}$ $\qquad fog^{-1} = \{(۱,۴),(۳,۸),(۵,۰)\}$

$g = \{(۲,۱),(۴,۳),(۶,۵)\}$

$f = \{(۲,۴),(۴,۸),(۶,۰)\}$

$\dfrac{h}{fog^{-1}} \rightsquigarrow \{(۱,\tfrac{۱}{۴}),(۳,\tfrac{۱}{۸}),\cancel{\times}\} \to \{(۱,\tfrac{۱}{۴}),(۳,\tfrac{۱}{۸})\}$

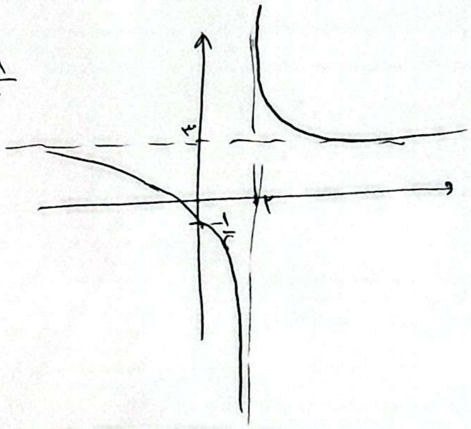
---

۶. $y = \dfrac{۳x+۱}{x-۲}$

$\dfrac{a}{c} = ۳$

$x = ۲$

x	y
۰	$-\frac{۱}{۲}$

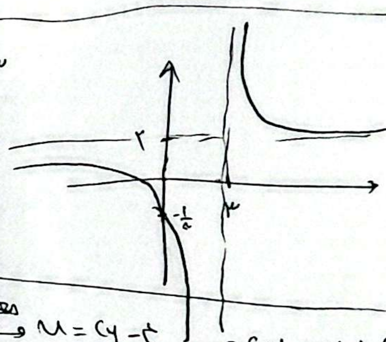


$\dfrac{۳y+۱}{y-۲} = x \to y = \dfrac{۲x+۱}{x-۳}$

ق‌ق $= ۳$

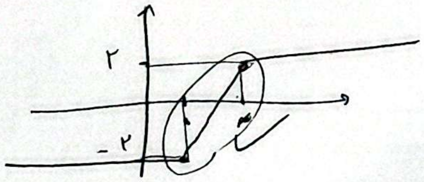
$\dfrac{a}{c} = ۲$

x	y
۰	$\frac{۱}{۳}$



---

۷. $f(x) = |x-۱| - |x-۳|$



$y = ax+b$

$\to \begin{cases} ۳a+b=۲ \\ -a-b=۲ \end{cases} \to \begin{cases} ۲a=۴ \\ \boxed{a=۲} \quad \boxed{b=-۴} \end{cases} \to y=۲x-۴$

$y=۲x-۴ \longrightarrow x=۲y-۴ \longrightarrow ۲y=x+۴$

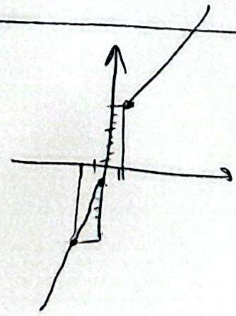
$\rightsquigarrow y=\dfrac{x+۴}{۲}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{x+۴}{۲} \to$

$R_{f(x)} \to [-۲,۲]$

---

۸. $f(x) = \begin{cases} x^۳+۴ & x \geq ۱ \to R=[۵,+\infty) \\ ۴x-۱ & x \leq ۰ \to R=[-۵,۱] \end{cases}$



$x = y^۳+۴ \to y^۳ = x-۴ \to y = \sqrt[۳]{x-۴}$

$x = ۴y-۱ \to ۴y = x+۱ \to y = \dfrac{x+۱}{۴}$

$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[۳]{x-۴} & x \geq ۵ \\ \dfrac{x+۱}{۴} & x \leq -۱ \end{cases}$

9. $f(x) = x^2 - \dfrac{(x+1)^3}{x+3} \rightarrow f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - x^3 - 1 - 3x^2 - 3x}{x+3}$

$\Rightarrow \dfrac{-3x-1}{x+3} \longrightarrow y = \dfrac{-3x-1}{x+3} \longrightarrow x = \dfrac{-3y-1}{y+3}$

$y = \dfrac{-3x-1}{x+3} \longrightarrow \dfrac{ax+b}{2x+d} \Big> \begin{matrix} a=-6 \\ b=-2 \\ d=6 \end{matrix}$

$f^{-1}(b) = f^{-1}(-2) = \dfrac{\cancel{-3}\overset{6}{}(-2)-1}{\cancel{-2+3}} = 5$

1

---

10. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} \longrightarrow y(x^2+1) = x$

$yx^2 + y = x \longrightarrow yx^2 + y - x = 0$

$\rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \longrightarrow a = y \quad b = -1 \quad c = y$

$x = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y} \rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x} \longrightarrow x \neq 0$

$1-4x^2 \geq 0$

$4x^2 \leq 1 \quad x^2 \leq \frac{1}{4}$

$\rightarrow \boxed{|x| \leq \frac{1}{2}}$

$\rightarrow (0, \frac{1}{2}]$
