نام و نام خانوادگی: سانا ز فاتح   ۲۰   مقطع: یازدهم دختر C   شماره تکلیف: ۱۱

سوال ۱) $a = ?$

$$f(x)=\begin{cases}x^3-4 & x>a\\ 12x-20 & x\leq a\end{cases}\xrightarrow[\text{یک به یک}]{\text{هر دو ضابطه}}$$

تنها شرط برای یک به یک کردن تابع $= f(a\leq x) \geq f(x\leq a)$

$$\Rightarrow a^3-4 \geq 12a-20 \Rightarrow \underset{\Downarrow}{a^3}-12a+16 \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{ccccc} & -4 & & 2 & \\ - & & + & & +\end{array} \Rightarrow \boxed{a:[-4,+\infty)}$$

$$a^3-8-12a+24=(a-2)(a^2+2a+4)-12(a-2)=(a-2)(\underbrace{a^2+2a-8}_{\to (a+4)(a-2)})$$

سوال ۲) $f(x)=3x+k$ $f^{-1}(2)=4$

$$\Rightarrow f(4)=2 \Rightarrow 3(4)+k=2 \to 12+k=2 \to k=-10$$
$$\Rightarrow f(x)=3x-10$$

الف) $f(7)=$

$$3x-10 \xrightarrow{x=7} 3(7)-10=21-10 \to \boxed{f(7)=11}$$

ب) $f(\underbrace{f(x)}_{3x-10})= > 3(3x-10)-10=9x-30-10=9x-40 \Rightarrow \boxed{f(f(x))=9x-40}$

سوال ۳) $A=(2a,a)$ $f(x)=\dfrac{ax}{x-1}$ $a=?$

$$f(a)=2a \to \frac{a(a)}{a-1}=2a \to \frac{a^2}{a-1}=2a \to a^2=2a^2-2a \to 2a=a^2 \to a^2-2a=0 \to a(a-2)=0$$

$\to a=0$

$a-2=0 \to a=2$

$\boxed{\text{مقدار } a = 0, 2} \overset{\text{غ ق ق}}{\Rightarrow} \boxed{a=2}$

سوال ۴) $f=\{(3,5),(4,7),(7,2),(9,6)\}$ $g=\{(3,2),(8,6),(9,5)\}$ $\Rightarrow f^{-1}=\{(5,3),(7,4),(2,7),(6,9)\}$

$g^{-1}=\{(2,3),(6,8),(5,9)\}$

الف) $f\circ f^{-1} = \{(5,5),(7,7),(2,2),(6,6)\}$

ب) $f^{-1}\circ f = \{(3,3),(4,4),(7,7),(9,9)\}$

ج) $f\circ g^{-1} = \{(2,5),(5,6)\}$

د) $g^{-1}\circ f = \{(3,9),(7,3),(9,8)\}$

سوال ۵) $f=\{(2,4),(4,8),(6,0)\}$ $g=\{(2,1),(4,3),(6,5)\}$ $h=\{(1,2),(3,4),(4,1),(5,1)\}$

$\dfrac{h}{f\circ g^{-1}}=$

$g^{-1}=\{(1,2),(3,4),(5,6)\}$ $f\circ g^{-1}=\{(1,4),(3,8),(5,0)\}$

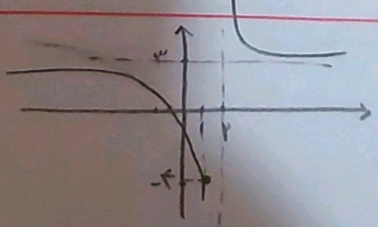
$$\frac{h}{f\circ g^{-1}}=\frac{(1,2)(3,4)(5,1)}{(1,4)(3,8)(5,0)}=\boxed{\left\{\left(1,\tfrac{1}{2}\right),\left(3,\tfrac{1}{2}\right)\right\}}$$

سوال ۶) تابع یک به یک است، تابع هموگرافیک

$y=\dfrac{3x+1}{x-2}$

ریشه مخرج 2 = مجانب قائم

$\dfrac{a}{c}=3$ = مجانب افقی

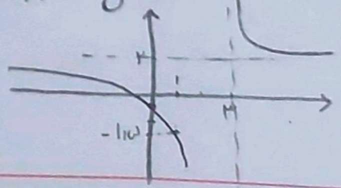


وارون تابع: $y=\dfrac{3x+1}{x-2} \to x=\dfrac{3y+1}{y-2} \to xy-2x=3y+1 \to xy-3y=2x+1 \to y(x-3)=2x+1 \to$

$$y=\frac{2x+1}{x-3} \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{x-3}}$$

مجانب قائم $= 3$

مجانب افقی $= 2$



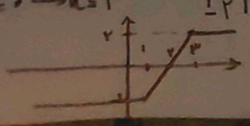
سوال ۷) $f(x)=|x-1|-|x-3|$ $[a,b]$

$x-1=0 \to x=1$

$x-3=0 \to x=3$

$$\begin{array}{c|c|c} & 1 & 3 \\ \hline -2 & & 2\end{array}$$

$\to x-1-(-x+3)=x-1+x-3=2x-4$



$\Rightarrow \begin{matrix}a=1\\ b=3\end{matrix}$ بازه $[1,3]$ وارون پذیر

$f^{-1} \Rightarrow y=2x-4 \to x=2y-4 \to$

$x+4=2y \to y=\dfrac{x+4}{2}$

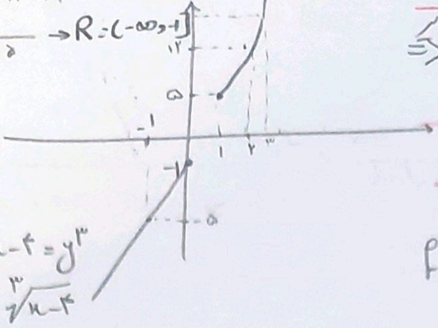
$$\Rightarrow \boxed{f^{-1}=\frac{x+4}{2} \quad D:[-2,2]}$$

ل ۸)

$$f(x)=\begin{cases} x^۳+۴ & x\geqslant ۱ \\ ۴x-۱ & x\leqslant ۰ \end{cases}$$

$\begin{array}{c|ccc} & ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline & ۵ & ۱۲ & ۳۱ \end{array} \rightarrow R=[۵,+\infty)$

$\begin{array}{c|cc} & ۰ & -۱ \\ \hline & -۱ & -۵ \end{array} \rightarrow R=(-\infty,-۱]$



⇐ تابع وارون‌پذیر است

$y=x^۳+۴ \xrightarrow[\text{وارون}]{} x=y^۳+۴ \rightarrow x-۴=y^۳$
$\rightarrow y=\sqrt[۳]{x-۴}$

$y=۴x-۱ \xrightarrow{\text{وارون}} x=۴y-۱ \rightarrow x+۱=۴y \rightarrow y=\frac{x+۱}{۴}$

$$\boxed{f^{-۱}(x)=\begin{cases} \sqrt[۳]{x-۴} & , x\geqslant ۵ \\ \frac{x+۱}{۴} & , x\leqslant -۱ \end{cases}}$$

ص

سوال ۹)

$f(x)=x^۲-\frac{(x+۱)^۳}{x+۳}$ $\quad f^{-۱}(x)=\frac{ax+b}{۲x+d}$ $\quad f^{-۱}(b)=?$ $\quad (b<۰)$

$x^۲-\frac{(x+۱)^۳}{(x+۳)} \longrightarrow \frac{x^۲(x+۳)-(x+۱)^۳}{x+۳}=\frac{x^۳+۳x^۲-(x^۳+۱+۳x+۳x^۲)}{x+۳}=\frac{\cancel{x^۳}+۳x^۲-\cancel{x^۳}-۱-۳x-\cancel{۳x^۲}}{x+۳}$

$=\frac{-۳x-۱}{x+۳} \xrightarrow{\text{وارون}} y=\frac{-۳x-۱}{x+۳} \Rightarrow x=\frac{-۳y-۱}{y+۳} \rightarrow xy+۳x=-۳y-۱ \rightarrow xy+۳y=-۱-۳x$

$\rightarrow y(x+۳)=-۱-۳x \rightarrow y=\frac{-۱-۳x}{x+۳} \xrightarrow{\times ۲} f^{-۱}(x)=\frac{-۶x-۲}{۲x+۶} \rightarrow b=-۲$

ص

$f^{-۱}(-۲)=\frac{-۶(-۲)-۲}{۲(-۲)+۶}=\frac{۱۲-۲}{-۴+۶}=\frac{۱۰}{۲}=\boxed{۵}$

سوال ۱۰)

$f(x)=\frac{x}{x^۲+۱}$ $\quad f^{-۱}(x)=?\longrightarrow y=\frac{x}{x^۲+۱} \xrightarrow{\text{وارون}} x=\frac{y}{y^۲+۱}$

چون $۱+x^۲>۰$ ⇐ y و x هم‌علامتاند

$x=\frac{y}{y^۲+۱} \rightarrow xy^۲-y+x=۰ \rightarrow \Delta=\frac{۱\pm\sqrt{۱-۴x^۲}}{۲x} \Rightarrow \boxed{f^{-۱}=\frac{۱\pm\sqrt{۱-۴x^۲}}{۲x} \quad (x\in[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}])}$

ص

$R_{(f)}=D_{(f^{-۱})} \longrightarrow R_{(f)}=[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}]$

$(-\infty,-۲]\cup[۲,+\infty) \leftarrow \frac{۱}{x+\frac{۱}{x}}$