نمره: ۱۸٫۵ — بارمبندی: ۱۰

۱) الف) $f=\{(3,2),(5,0),(2,n^2-n),(3,1),(-1,4)\}$

$n^2-n=2 \rightarrow n^2-n-2=0 \rightarrow (n-2)(n+1)$ ✓ $n=2$ ✗ $n=-1$

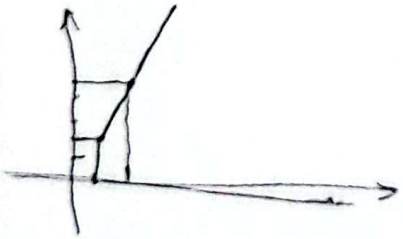
ب) $f=\{(-1,1),(1,2),(2,3),(a,m-1),(a+1,n),(m,3)\}$ (۲)

$m=3$

$a=-1 \rightarrow a+2=1 \rightarrow n=2$

---

۲) $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x\geq 1 \\ x+a & x<1 \end{cases} \rightarrow (-\infty,1) \rightarrow x+a<2 \rightarrow a>1$



$1+a\leq 2 \rightarrow a\leq 1$ (۱)

---

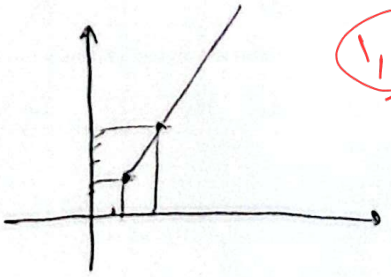
۳)

$f(x)=\begin{cases} 3x-1 & x\geq 1 \\ ax+a-1 & x<0 \rightarrow (-\infty,0) \rightarrow ax+a-1<2 \end{cases}$

$a-1<2 \rightarrow a<3$

$a>0$

$0<a<3$ ← ۱



(۱٫۵)

---

۴) الف) $y=x^2+2$

$y_1=x_1^2+2 \rightarrow x_1^2+2=x_2^2+2$

$y=x^2+2 \rightarrow x_1^2=x_2^2 \rightarrow x_1=x_2$

$x=y^2+2 \rightarrow y^2=x-2 \rightarrow y=\sqrt{x-2}$ (۲)

ب) $y=x^2-4x+4$

$y=(x_1-2)^2-2$

$y=(x_2-2)^2-2$ $\rightarrow (x_1-2)^2=(x_2-2)^2$

$x_1=\pm x_2$ α

---

۵) الف) $y=\frac{3x+1}{x-2}$ ✓ هوراس

$x=-\frac{-2y-1}{y-3}=\frac{2y+1}{y-3}$

ب) $y=\frac{4+3x}{x+2}$

$y=\frac{2(x+2)}{x+2}=2$ α (۲)

۸

ب) $y=x^2-4x+3$

$x=-\frac{b}{2a}=2$

$y=-(2-2)^2+1=1$

$\Rightarrow [1,+\infty)$

$x=\sqrt{y-1}+2 \rightarrow x-2=\sqrt{y-1} \rightarrow (x-2)^2=y-1$

$f^{-1}(x)=x^2-4x+5 \quad ; \quad x\geq 2$

الف) $y=\sqrt{x-3}+2$

$y=\sqrt{x-1}+4 \quad , \quad y=\sqrt{3x-2}+4$

$\sqrt{x-1}+4=\sqrt{3x-2} \rightarrow x-1+8\sqrt{x-1}+16=3x-2$

$8\sqrt{x-1}=2x-17 \rightarrow 64(x-1)=4x^2-68x+289$

$4x^2-132x+353=0$

$x=\frac{132\pm\sqrt{132^2-4\times4\times353}}{8}=\frac{132\pm\sqrt{4624}}{8}=\frac{132\pm68}{8}$

$x=25 \quad , \quad x=\frac{64}{8}=8$

$x=8 \rightarrow \sqrt{8-3}+2=\sqrt{5}+2 \neq 4$

$x=25 \rightarrow \sqrt{25-3}+2=\sqrt{22}+2 \neq 4$

---

۹) $f(x)=x+\sqrt{x-1} \rightarrow R_f=[0+\infty)$ ($f^{-1}(x)=ax+b-\sqrt{x-c}$ $\rightarrow D_{f^{-1}}=[0+\infty)$

$f^{-1}(x)=x=y+\sqrt{y}+\frac{1}{4} \rightarrow x-\frac{3}{4}=y+\sqrt{y}+\frac{1}{4}$

$x+\frac{1}{4}=(\sqrt{y}+\frac{1}{2})^2 \rightarrow \sqrt{x+\frac{1}{4}}=\sqrt{y}+\frac{1}{2}$

$\sqrt{y}=\sqrt{x+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2} \rightarrow y=x+\frac{1}{4}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}$

$f^{-1}(x)=x+\frac{1}{4}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}$

$a+2b+c=1+1-1=1$

$a=1 \quad , \quad b=\frac{1}{2} \quad , \quad c=-\frac{3}{4}$

---

۱۷) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-3}} \rightarrow y_1=y_2 \rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-3}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-3}} \rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2-3}=\frac{x_2^2}{x_2^2-3} \rightarrow \frac{x_1^2+x_2^2-6}{x_1^2-x_2^2}$

$1+\frac{x_1^2+x_2^2}{8}=1+\frac{x_2^2-3}{8} \rightarrow \frac{x_1^2+x_2^2}{8}=\frac{x_2^2-3}{8}$

$x_1^2+x_2^2=x_2^2-3 \rightarrow x_1^2=-3$ غیرممکن

$x=\frac{y}{\sqrt{y^2-8}} \rightarrow x^2=\frac{y^2}{y^2-8} \rightarrow x^2y^2-8x^2=y^2 \rightarrow y^2(x^2-1)=8x^2 \rightarrow y=\frac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-1}}$

---

۱۵) $f^{-1}(x)=\frac{x}{1+|x|} \rightarrow g(x)=\sqrt{x-1}$

$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{x-1} & x\geq 0 \\ \frac{x}{x+1} & x<0 \end{cases}$

$f(-\frac{3}{4})=(\frac{3}{4}-)f=-\frac{3}{4}$

$g^{-1}(x)=y=x+1 \rightarrow g^{-1}(x)=(x+1)^2 \rightarrow g^{-1}(\frac{3}{5})=(\frac{3}{5}-)f=\frac{3}{2}$

$f(-\frac{3}{4})+g^{-1}(-\frac{3}{4})=\frac{3}{4}+\frac{9}{4}=\frac{12}{4}=3$

---

۱۰) $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1} \rightarrow x=\sqrt[3]{y-1} \rightarrow y-1=x^3 \quad ; \quad y=x^3+1$

$y(x)=f(x)+\sqrt{f(x)} \xrightarrow{x\geq -1} g(x)=x^3+1+\sqrt{x^3+1}$

$\sqrt{x^3+1}=x \rightarrow x^3+1=x^2 \quad x=2$

$x^3+1=9 \rightarrow x^3=8$

$g^{-1}(x)=b \quad g(b)=x$

$y(b)=x \rightarrow y(b)=g^{-1}(x)$