شماره ۱ — یازدهم دفتری — ستایش صفر — ۲۰

سوال ۱) — ۳

الف) $f\{(3,2),(n,5),(3,n^2-n),(m,2),(-1,4)\}$; $m=3$

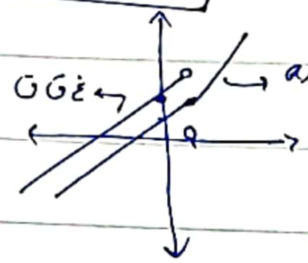
$n^2-n=2 \Rightarrow n^2-n-2=0 \Rightarrow (n-2)(n+1)=0 \Rightarrow n=2 , n=-1$; $\Rightarrow \boxed{n=2}$

اگر $n=-1$ باشد $(-1,5)$ و $(-1,4)$ را داریم پس تابع قبول نیست $\Rightarrow n=2$ ، $a=-1$

ب) $f\{(-1,1),(1,2),(2,3),(a,m-1),(a+2,n),(m,3)\}$; $m=2$ ، $n=2$; $\Rightarrow \boxed{n=2}$

سوال ۲) — ۵

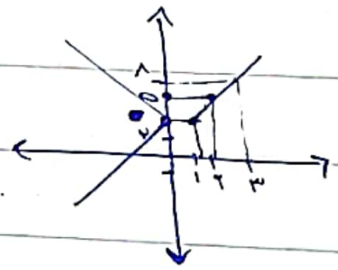
$$f(x)=\begin{cases}3x-1 & ; x\geq 1\\ x+a & ; x<1\end{cases}$$



a حداکثر max $=1$; $\boxed{a\in(-\infty,1]}$

سوال ۳) — ۳

$$f(x)=\begin{cases}3x-1 & ; x\geq 1\\ ax+a-1 & ; x\leq 0\end{cases}$$

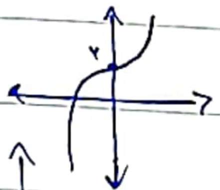


$a-1<2 \Rightarrow a<3$ ، $a>0$ اگر a منفی یا صفر باشد تابع غیر یک به یک

$\boxed{a\in(0,3)}$

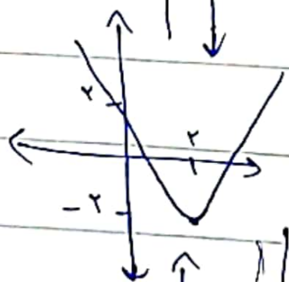
سوال ۴) — ۵

الف) $y=x^3+2$



تابع یک به یک $\checkmark$ $\Rightarrow y=\sqrt[3]{x-2}$ ضابطه عکس

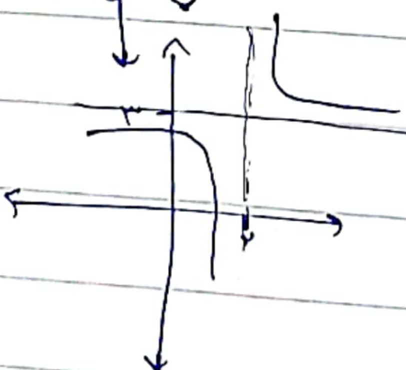
ب) $y=x^2-4x+2$



تابع غیر یک به یک $\times$

سوال ۵) — ۳

الف) $y=\frac{3x+1}{x-2}$; $x\neq 2$



تابع یک به یک — ضابطه عکس: $x=\frac{3y+1}{y-2} \rightarrow xy-2x=3y+1 \rightarrow$

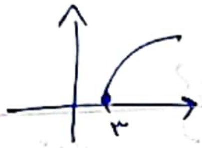
$xy-3y=1+2x \Rightarrow y(x-3)=1+2x$

$\boxed{y=\frac{2x+1}{x-3}}$

ب) $y=\frac{4+2x}{x+2} \rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-2\} \rightarrow R:\{2\}$ تابع یک به یک نیست

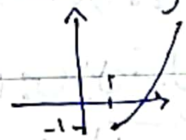
سوال ۶)

الف) $y=\sqrt{x-3}$, $x>3$



تابع یک‌به‌یک $\sqrt{y-3}=x \xrightarrow{\text{ضابطه معکوس}} y-3=x^2 \to y=x^2+3$ (۲)

ب) $y=x^2-4x+3$, $x\in[2,+\infty)$, $(x-3)(x-1)$



تابع یک‌به‌یک $x=(y-2)^2-1$ ضابطه معکوس $\to (y-2)^2=x+1 \to y-2=\sqrt{x+1}$
$\to y=\sqrt{x+1}+2$, $x\geq -1$

سوال ۷)

$f(x)=x+\sqrt{x} \xrightarrow{f^{-1}(x)} x=y+\sqrt{y}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=(\sqrt{y}+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4} \Rightarrow x+\frac{1}{4}=(\sqrt{y}+\frac{1}{2})^2$

$\Rightarrow \sqrt{y}+\frac{1}{2}=\sqrt{x+\frac{1}{4}} \Rightarrow \sqrt{y}=\sqrt{x+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} y=x+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}=x-\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}$ (۲)

$a+2b+4c=1+1+(-1)=1$

$a=1 \quad b=\frac{1}{2} \quad c=\frac{-1}{4}$

سوال ۸)

$y=\frac{x}{\sqrt{x^2-2}} \to y=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-2}}$, $y=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-2}}$ $\Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-2}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-2}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{x_1^2}{x_1^2-2}=\frac{x_2^2}{x_2^2-2} \Rightarrow$

x و y هم‌علامت‌اند
پس y نمی‌تواند همزمان
دو x مختلف العلامت داشته باشد

$x_1^2x_2^2-2x_1^2=x_1^2x_2^2-2x_2^2 \Rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow x_1=\pm x_2$ ← تابع یک‌به‌یک است ← $x_1=x_2$ ← (−) غیرقابل قبول

$x=\frac{y}{\sqrt{y^2-2}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2=\frac{y^2}{y^2-2} \Rightarrow x^2y^2-2x^2=y^2 \Rightarrow (x^2-1)y^2=2x^2 \Rightarrow y^2=\frac{2x^2}{x^2-1} \Rightarrow y=\pm\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-1}}$ (۲)

$\xrightarrow{\text{x و y هم علامت‌اند}} y=\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-1}}$

سوال ۹)

$f^{(-1)}(x)=\frac{x}{1+|x|}$, $g(x)=\sqrt{x}-1$

$x<0 \to f^{(-1)}(x)=\frac{x}{1-x} \to x=\frac{y}{1-y} \to x-xy=y \to x=y(1+x) \to y=\frac{x}{1+x} \to$ (۲)

$f(-\frac{2}{5})=\frac{-\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}}=-\frac{2}{3}$ $\quad g(x)=\sqrt{x}-1 \to g^{-1}(x) \to x=\sqrt{y}-1 \to x+1=\sqrt{y} \to y=(x+1)^2 \to$

$g^{(-1)}(-\frac{2}{5})=(-\frac{2}{5}+1)^2=\frac{9}{25} \Rightarrow f(-\frac{2}{5})+g^{-1}(-\frac{2}{5})=-\frac{2}{3}+\frac{9}{25}=\frac{-50+27}{75}=\frac{-23}{75}$

سوال ۱۰)

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ، $g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)}$

$x = \sqrt[3]{y-1} \to x^3 = y-1 \to y = x^3+1 \to g(x) = (x^3+1) + \sqrt{x^3+1}$ ⑤

$\to g(x) = 12 \to (x^3+1) + \sqrt{x^3+1} = 12 \to x = 2 \Rightarrow g^{(-1)}(12) = 2$

$\sqrt{x^3+1} = t \to t^2 + t = 12 \to t^2 + t - 12 = 0 \to (t+4)(t-3) = 0 \to \begin{cases} t = -4 \text{ ق} \\ t = 3 \end{cases}$

$\sqrt{x^3+1} = 3 \to x^3 + 1 = 9 \to x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$