نام و نام خانوادگی ......[illegible]...... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ...۱... کلاس ...یازدهم ریاضی...

۱

الف) $f = \{(3,2), (x,a), (3, x^2-x), (m,2), (-1,4)\}$

$x^2 - x = 2 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \;,\; m = 3$

$x = 2$ $\cancel{x=-1}$

ب) $f = \{(-1,1), (1,2), (2,3), (a, m-1), (a+2, x), (m,3)\}$

$(a,1)$ → $a = -1$

$(1,x)$ → $x = 2$

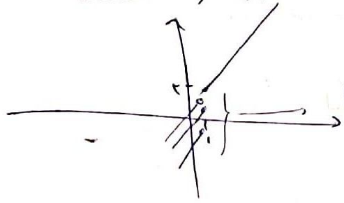
$m = 2$

$x = 2$

$a = -1$

۲

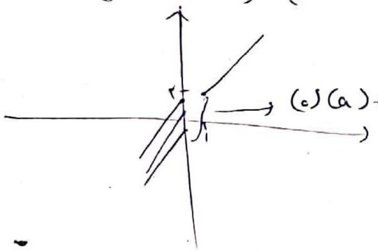
$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & ; x \geq 1 \\ x+a & ; x < 1 \end{cases}$



$\rightarrow 1 + a \leq 2 \rightarrow a \leq 1$

۳

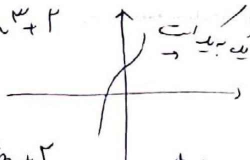
$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & ; x \geq 1 \\ ax + a - 1 & ; a < 0 \end{cases}$



$\rightarrow (0)(a) + a - 1 < 2 \rightarrow a - 1 < 2 \rightarrow a < 3$

۴

الف) $y = x^3 + 2$



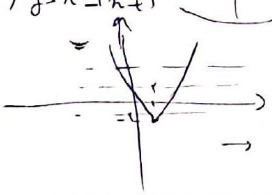
یک به یک است $\Rightarrow x = y^3 + 2 \rightarrow x - 2 = y^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x-2}$

f^{-1}

ب) $y = x^2 - 4x + 2$

$\frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$

$4 - 8 + 2 = -2$



→ یک به یک نیست

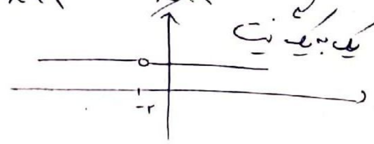
۵

الف) $y = \frac{3x+1}{x-2} \rightarrow x = \frac{3y+1}{y-2} \rightarrow xy - 2x = 3y + 1 \rightarrow y(x-3) = 2x+1 \rightarrow y = \frac{2x+1}{x-3}$

تابع معکوس‌پذیر است بنابراین یک به یک است

ب) $y = \frac{4+2x}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2} \xrightarrow{x \neq -2} y = 2$

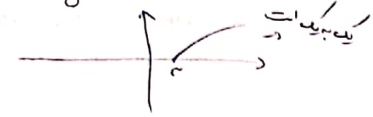
یک به یک نیست



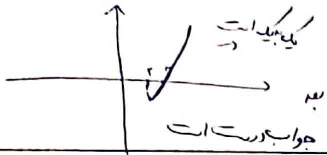
۶

الف) $y=\sqrt{x-3} \longrightarrow x=\sqrt{y-3} \Rightarrow x^2=y-3 \to y=x^2+3\ (x\geq 0)$

برد $y=\sqrt{x-3}$



ب) $y=x^2-4x+3=(x-1)(x-3) \Rightarrow x=y^2-4y+3+1-1 \to x=(y-2)^2-1 \Rightarrow x+1=(y-2)^2$



$\Rightarrow \pm\sqrt{x+1}=y-2 \to y=\pm\sqrt{x+1}+2$

از آنجایی که دامنه $x\geq 2$ از ۲ به بعد بود بنابراین برد تابع معکوس از ۲ به بعد است پس منفی غیر قابل قبول و $y=\sqrt{x+1}+2$ جواب درست است

۷

$f(x)=x+\sqrt{x}$

$f^{-1}(x)=ax+b-\sqrt{x-c}$

غیر قابل قبول چون طبق خواسته سوال در $f^{-1}(x)$ ترم $-\sqrt{x-c}$ وجود دارد اگر منفی باشد علامت همین ترکیب درست می‌شود

$y=x+\sqrt{x} \to x+\sqrt{x}-y=0 \to \sqrt{x}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4y}}{2} \to x=\left(\frac{-1\pm\sqrt{1+4y}}{2}\right)^2 \xrightarrow{\text{تابع معکوس}} y=\left(\frac{-1\pm\sqrt{1+4x}}{2}\right)^2$

$y=\frac{1+1+4x-2\sqrt{1+4x}}{2}=\frac{2(1+2x-\sqrt{1+4x})}{2}=1+2x-\sqrt{1+4x}$

$a=2$
$b=1$
$c=-4$

$a+2b+4c=2+2-16=-12$

۸

$y=\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}$

$\left.\begin{array}{l} y=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-2}} \\ y=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-2}} \end{array}\right\} \to \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-2}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-2}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{x_1^2}{x_1^2-2}=\frac{x_2^2}{x_2^2-2} \Rightarrow \cancel{x_1^2x_2^2}-2x_2^2=\cancel{x_1^2x_2^2}-2x_1^2 \to x_1=\pm x_2$

غیر قابل قبول چون x و y هم علامت‌اند دیگر مثبت باشد x نمی‌تواند منفی باشد

$x=\frac{y}{\sqrt{y^2-2}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2=\frac{y^2}{y^2-2} \to x^2y^2-2x^2=y^2 \to y^2(x^2-1)=2x^2 \to y^2=\frac{2x^2}{x^2-1} \to y=\pm\sqrt{\frac{2x^2}{x^2-1}}=\pm x\sqrt{\frac{2}{x^2-1}}$

غیر قابل قبول چون y و x هم علامت‌اند

$\Rightarrow y=\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-1}}$

۹

$f^{-1}(x)=\frac{x}{1+|x|}$

$g(x)=\sqrt{x}-1$

$f(-\frac{2}{5})+g^{-1}(\frac{-2}{5})=\frac{-2}{3}+\frac{9}{25}=\frac{-50+27}{75}=\frac{-23}{75}$

$\frac{x}{1+|x|}=\frac{-2}{5} \to 5x=-2-2|x| \xrightarrow{x\geq 0} 7x=-2 \to x=\cancel{\frac{-2}{7}}$ جواب غیر قابل قبول

$\xrightarrow{x<0} 3x=-2 \to x=\frac{-2}{3}$

$f(\frac{-2}{5})=\frac{-2}{3}$

$\sqrt{x}-1=\frac{-2}{5} \to \sqrt{x}=\frac{3}{5}$

$x=\frac{9}{25}$

$g^{-1}(\frac{-2}{5})=\frac{9}{25}$

۱۰

$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1} \to y=\sqrt[3]{x-1} \xrightarrow{\text{معکوس}} x=\sqrt[3]{y-1} \to x^3+1=y \to f(x)=x^3+1$

$g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}=x^3+1+\sqrt{x^3+1}$

$\underbrace{x^3+1}_{9}+\sqrt{x^3+1}=12$, $\sqrt{9}=3$

$x^3+1=9$

$x^3=8 \to x=2 \to g^{-1}(12)=2$