۲۰

عسل طاهری

سوال ←

$f=\{(3,2)(n,2)(3,n^2-n)(m,2)(-1,4)\}$

$n^2-n=2 \longrightarrow n^2-n-2 \rightarrow (n-2)(n+1)$ ← $n=2$ ✓ / $n=-1$ ✗

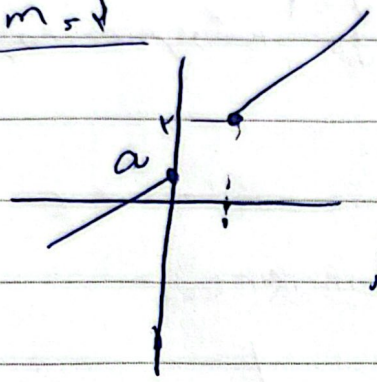
$m=3$

ب)

$f=\{(-1,1)(1,2)(2,3)/(a,m-1)/(a+2,n)(m,3)\}$

$m-1 \Rightarrow 2-1=1 \longrightarrow a=1$ $\quad a+2=-1+2 \rightarrow n=2$

$m=2$



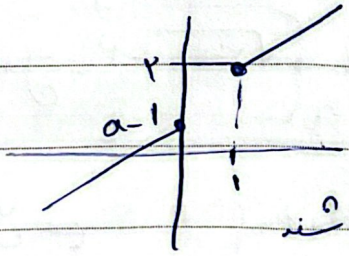
سوال ۲ ←

ج) اگر قرار است این دو تابع یک‌به‌یک باشند نباید بردِ تابعِ آن‌ها اشتراک داشته باشد

برد تابع $y=3x-1$ ← $(2,+\infty)$

برد تابع $y=x+a$ ← $(-\infty,a)$

$a \geq 1$ باشد ←



سوال ۳ ←

ب) $y=3x-1 \rightarrow Rf=(2,+\infty)$

برای اینکه برد آن‌ها با هم برابر نباشند نباید هیچ قطعه‌ای اشتراک داشته باشند

پس کافی است این ضابطه مثبت باشد $a>0$ و برد تابع $x<0$ ← $(-\infty,a-1]$ ← $a-1<2$ ← $a<3$

$0<a<3$

سوال ۴ ←

الف) $y=x^3+2 \rightarrow y_1=x_1^3+2$

$y=x^3+2 \longrightarrow x=y^3+2 \rightarrow x-2=y^3$

$y=\sqrt[3]{x-2}$

ب) $y = x^2 - 4x + 2 \longrightarrow x^2 - 4x + 2 = 2 \longrightarrow x^2 - 4x = 0 \longrightarrow x(x-4) = 0 \longrightarrow x = 0 , x = 4$

چون به ازای مقادیر مختلف یک y برابر داده است

پس نمی‌تواند یک به یک باشد ← پس یک به یک نیست

سوال ۳ ←

ا) $\frac{3x+1}{x-2} \longrightarrow \frac{x-2+2x+3}{x-2} \longrightarrow 1 + \frac{2x+3}{x-2}$

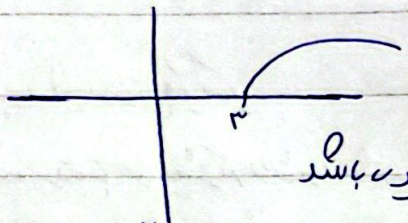
← تابع صعودی اکید است پس یک به یک است

ب) $y = \frac{4+2x}{x+2} \longrightarrow \frac{2(2+x)}{x+2} = 2 \longrightarrow y = 2$

← پس به ازای هر x جواب y ثابت است پس یک به یک نیست

سوال ۴ ←

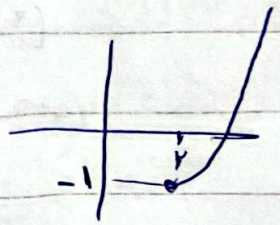
ا) $y = \sqrt{x-3}$



← تابع یک به یک باشد

$y^2 = x - 3 \longrightarrow y = x^2 + 3$

ب) $y = x^2 - 4x + 3 \longrightarrow$



← یک به یک است

$x = y^2 - 4y + 3 \longrightarrow x = y^2 - 4y + 4 - 1$

$x = (y-2)^2 - 1 \longrightarrow x + 1 = (y-2)^2 \longrightarrow \sqrt{x+1} = y - 2$

$\boxed{y = 2 + \sqrt{x+1}}$

سوال ۵ ←

$\sqrt{x} = t \longrightarrow f(x) = t^2 + t \longrightarrow f^{-1}(x) \rightarrow y = t^2 + t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \longrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = (t + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \longrightarrow (t + \frac{1}{2})^2 = x + \frac{1}{4} \longrightarrow t + \frac{1}{2} = \sqrt{x + \frac{1}{4}}$

$\longrightarrow y = x + \frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{1}{4}}$

ج) $a = 1 \quad b = \frac{1}{2} \quad c = -\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{2} \longrightarrow a + 2b + 4c \longrightarrow$

سوال ۶ ←

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}} \longrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - 2}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 - 2}}$

$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{x_1^2}{x_1^2 - 2} = \frac{x_2^2}{x_2^2 - 2} \longrightarrow x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 = x_1^2 x_2^2 - 2x_2^2 \longrightarrow x_1 = \pm x_2$

← غیر قابل قبول

$x_1 = x_2 \rightarrow f^{-1}(x) \Rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{y^2-2}} \Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{y^2-2} \Rightarrow y^2x^2 - 2x^2 = y^2$

$\rightarrow y^2x^2 - 2x^2 - y^2 \rightarrow y^2x^2 - y^2 = 2x^2 \rightarrow y^2 = \frac{2x^2}{x^2-1}$

$\rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{2x^2}{x^2-1}} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-1}}$

یکی از این (منفی) را حذف می‌کند با شرط

سوال ←

اگر $x \geq 0 \rightarrow y = \frac{x}{1+x} \rightarrow y(1+x) = x \rightarrow y + yx = x$

$\rightarrow y = x - yx \rightarrow y = x(1-y) \rightarrow \frac{y}{1-y} = x$

(۲)

اگر $x < 0 \rightarrow y = \frac{x}{1-x} \rightarrow y(1-x) = x \rightarrow y - yx = x \rightarrow y = x + yx$

$\rightarrow y = x(1+y) \rightarrow \frac{y}{1+y} = x$

$f(x)\begin{cases} \frac{x}{1-x} & x \geq 0 \\ \frac{x}{1+x} & x < 0 \end{cases} \rightarrow f(-\frac{2}{3}) \Rightarrow = -\frac{2}{3}$

$g(x) = \sqrt{x-1} \rightarrow y = \sqrt{x-1} \rightarrow y+1 = \sqrt{x} \rightarrow (y+1)^2 = x$

$g^{-1}(x) = (x+1)^2 \rightarrow g^{-1}(\frac{2}{5}) = (\frac{-2}{5}+1)^2 = \frac{9}{25} \rightarrow -\frac{2}{3} + \frac{9}{25} = \boxed{-\frac{23}{75}}$

سوال ←

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} \rightarrow y^3 = x - 1 \rightarrow x^3 = y+1$

$\rightarrow f(x) = x^3+1$

$g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)} \rightarrow x^3+1 + \sqrt{x^3+1} \rightarrow t = \sqrt{x^3+1}$

(۲)

$\rightarrow t^2 = x^3+1 \qquad t^2 + t = y \rightarrow t^2 + t - y$

$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4y}}{2} \xrightarrow{\sqrt{x^3+1}} t = \frac{-1+\sqrt{1-4y}}{2}$

$\Rightarrow x^3 + 1 = t^2 \Rightarrow x^3 = t^2 - 1 \rightarrow x = \sqrt[3]{t^2-1}$

$x = \sqrt[3]{\left(\frac{-1+\sqrt{1+4y}}{2}\right)^2 - 1} = g^{-1}(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{-1+\sqrt{1+4y}}{2}\right)^2 - 1}$

$\rightarrow g^{-1}(12) = \boxed{2}$