الیسا جلالی   تکلیف شماره ۱.

۱. الف) $f = \{(3,2)(x,\omega)(3,x^2-x)(m,2)(-1,2)\}$

$m = 3$

$x^2 - x = 2 \qquad x^2 - x - 2 = 0 \;\begin{cases} x = 2 \;✓ \\ x = -1 \end{cases}$ غ ق ق تابع نمی‌شود

ب) $f = \{(-1,1)(1,2)(2,3)(a,m-1)(a+2,n)(n,3)\}$

$a = -1$

$m = 3$

$n = 2$ ✓

۲- $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x \geq 1 \\ 2x+a & x < 1 \end{cases}$ اشتراک برد ها باید تهی باشد

$R_1 = [2,+\infty)$ $\qquad a+1 \leq 2$

$R_2 = (-\infty, a+1)$ $\qquad a \leq 1 \qquad a \in (-\infty, 1]$

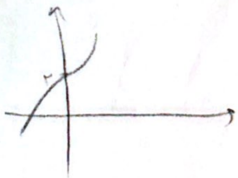
۳- $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & ; x \geq 1 \\ ax+a-1 & ; x \leq 0 \end{cases}$ $\qquad a > 0$ شیب ها باید هم علامت باشند

$a \in (0,3] \Leftarrow$

$R_1 = [2,+\infty)$

$R_2 = (-\infty, a-1]$ $\qquad a-1 < 2 \qquad a < 3 \qquad a \in (-\infty, 3)$

۴- الف) $y = x^3 + 2$

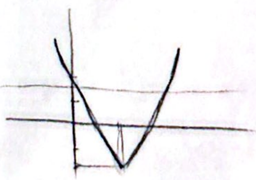


یک به یک است

$x = y^3 + 2$

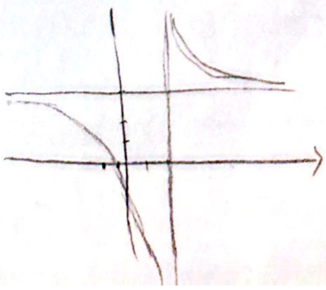
$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$

ب) $y = x^2 - 4x + 2$



یک به یک نیست

۵- الف) $y = \dfrac{3x+1}{x-2}$



یک به یک است

$x = \dfrac{3y+1}{y-2} \qquad y = \dfrac{-2x-1}{x-3} = \dfrac{2x+1}{x-3}$

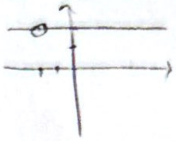
$f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$

مجانب افقی $= 3$

مجانب قائم $= 2$

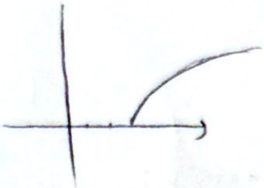
$y = \frac{x^2+2x}{x+2} = \frac{2(\cancel{x+2})}{\cancel{x+2}} = 2$

تابع ثابت و یک به یک نیست



-۶

الف) $y = \sqrt{x-3}$



یک به یک است

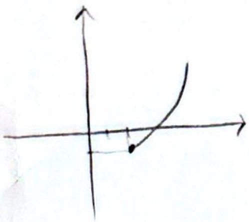
$D_f = [3, +\infty) = R_{f^{-1}}$

$R = [0, +\infty) = D_{f^{-1}}$

$x = \sqrt{y-3}$

$x^2 = y-3 \qquad y = x^2+3 \rightarrow f^{-1}(x) = x^2+3 \; ; \; x \geq 0$

ب) $y = x^2 - 4x + 3$



یک به یک است

$D_f = [2, +\infty) = R_{f^{-1}}$

$x+1 = y^2 - 4y + 4$

$x+1 = (y-2)^2$

$y-2 = \pm\sqrt{x+1} \qquad y = 2 \pm \sqrt{x+1} \longrightarrow f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+1}$

-۷

$f(x) = x + \sqrt{x}$

$D_f = [0, +\infty) = R_{f^{-1}}$

$x = y + \sqrt{y} \qquad x + \frac{1}{4} = y + \sqrt{y} + \frac{1}{4}$

$x + \frac{1}{4} = (\sqrt{y} + \frac{1}{2})^2 \qquad \sqrt{y} + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{x+\frac{1}{4}}$ رد

$\sqrt{y} = \sqrt{x+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \xrightarrow{()^2} y = x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \sqrt{x+\frac{1}{4}} = x + \frac{1}{2} - \sqrt{x+\frac{1}{4}}$

$a = 1 \qquad b = \frac{1}{2} \qquad c = -\frac{1}{4} \qquad a + 2b + 4c = 1 + 1 - 1 = 1$

-۸

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}} \xrightarrow{y_1 = y_2} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-2}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-2}} \xrightarrow{()^2} \frac{x_1^2}{x_1^2-2} = \frac{x_2^2}{x_2^2-2}$

$\cancel{x_1^2 x_2^2} - 2x_2^2 = \cancel{x_1^2 x_2^2} - 2x_1^2 \qquad x_1^2 = x_2^2 \qquad x_1 = \pm x_2$

x_1 و x_2 هم علامت باشند

پس $x_1 = -x_2$ غیرقابل قبول است و $x_1 = x_2$. پس تابع یک به یک است.

در این صورت $y_1 = -y_2$ برقرار نمی‌شود زیرا مخرج همواره مثبت است.

$x = \frac{y}{\sqrt{y^2-2}} \xrightarrow{()^2} x^2 = \frac{y^2}{y^2-2} \qquad y^2 = -\frac{-2x^2}{x^2-1} = \frac{2x^2}{x^2-1} \qquad \boxed{y = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-1}}}$

زیرا x و y هم علامت باشند

$f^{-1}(x) = \frac{x}{|x|+1} = -\frac{۲}{۵}$ $\quad \frac{x}{-x+۱} = -\frac{۲}{۵}$ $\quad ۵x = ۲x - ۲$

$۳x = -۲ \quad x = -\frac{۲}{۳}$

مخرج همواره مثبت است

پس $x<0$

$f(-\frac{۲}{۵}) = -\frac{۲}{۳}$

$g(x) = \sqrt{x} - ۱ = -\frac{۲}{۵}$ $\quad \sqrt{x} = \frac{۳}{۵}$ $\quad x = \frac{۹}{۲۵}$

$g^{-1}(-\frac{۲}{۵}) = \frac{۹}{۲۵}$

$f(-\frac{۲}{۵}) + g^{-1}(-\frac{۲}{۵}) = \frac{۹}{۲۵} - \frac{۲}{۳} = \frac{۲۷}{۷۵} - \frac{۵۰}{۷۵} = \frac{-۲۳}{۷۵}$

$f^{-1}(x) = \sqrt[۳]{x-۱} \rightarrow x = \sqrt[۳]{y-۱}$ $\quad x^۳ = y-۱$ $\quad y = x^۳+۱$ -۱۰

$f(x) = x^۳+۱$

$g(x) = x^۳+۱+\sqrt{x^۳+۱} = ۱۲ \longrightarrow x = ۲$

$g^{-1}(۱۲) = ۲$