الیسا جلالی - ... ۱۰

۱۹,۷۵

۱. الف) $f = \{(3,2)(x,5)(3,x^2-x)(x,2)(-1,2)\}$

$x = 3$

$x^2 - x = 2 \qquad x^2 - x - 2 = 0 \quad \begin{cases} x = 2 ✓ \\ x = -1 \end{cases}$ غ ق ق تابع نمی‌شود

ب) $f = \{(-1,1)(1,2)(2,3)(a,m-1)(a+2,n)(n,3)\}$

$a = -1$

$m = 2$

$n = 2$ ✓

۲- $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x \geq 1 \\ 2x+a & x < 1 \end{cases}$ اشتراک بردها باید تهی باشد

$R_1 = [2, +\infty)$

$R_2 = (-\infty, a+1)$

$a+1 \leq 2$

$a \leq 1 \qquad a \in (-\infty, 1]$

۳- $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & ; x \geq 1 \\ ax+a-1 & ; x \leq 0 \end{cases} \qquad a > 0$ شیب‌ها باید هم‌علامت باشند

$a \in (0, 3)$ ✓

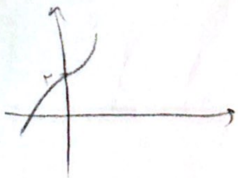
۱,۷۵

$R_1 = [2, +\infty)$

$R_2 = (-\infty, a-1]$

$a - 1 < 2 \qquad a < 3 \qquad a \in (-\infty, 3)$

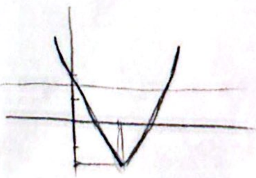
۴- الف) $y = x^3 + 2$ یک به یک است



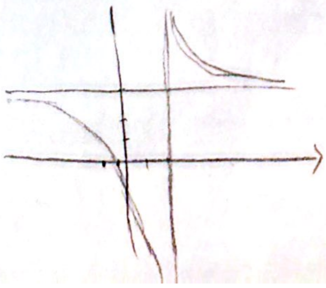
$x = y^3 + 2$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$

ب) $y = x^2 - 4x + 2$ یک به یک نیست



۵- الف) $y = \dfrac{3x+1}{x-2}$ یک به یک است



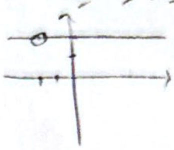
مجانب افقی $= 3$

مجانب قائم $= 2$

$x = \dfrac{3y+1}{y-2} \qquad y = \dfrac{-2x-1}{x-3} = \dfrac{2x+1}{-x+3}$

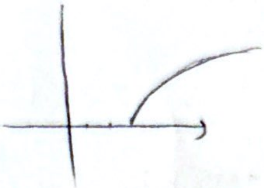
$f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$

$y=\frac{4+2x}{x+2}=\frac{2(x+2)}{x+2}=2$ تابع ثابت و یک به یک نیست



۶-

الف) $y=\sqrt{x-3}$



یک به یک است

$D_f=[3,+\infty)=R_{f^{-1}}$

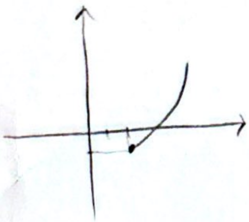
$R=[0,+\infty)=D_{f^{-1}}$

۳

$x=\sqrt{y-3}$

$x^2=y-3 \qquad y=x^2+3 \rightarrow f^{-1}(x)=x^2+3 \ ; \ x\geq 0$

ب) $y=x^2-4x+3$



یک به یک است

$D_f=[2,+\infty)=R_{f^{-1}}$

$x+1=y^2-4y+4$

$x+1=(y-2)^2$

$y-2=\pm\sqrt{x+1} \qquad y=2\pm\sqrt{x+1} \longrightarrow f^{-1}(x)=2+\sqrt{x+1}$

۷-

$f(x)=x+\sqrt{x}$

$D_f=[0,+\infty)=R_{f^{-1}}$

$x=y+\sqrt{y} \qquad x+\frac{1}{4}=y+\sqrt{y}+\frac{1}{4}$

$x+\frac{1}{4}=(\sqrt{y}+\frac{1}{2})^2 \qquad \sqrt{y}+\frac{1}{2}=\pm\sqrt{x+\frac{1}{4}}$ قبول

۲

$\sqrt{y}=\sqrt{x+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2} \xrightarrow{()^2} y=x+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}=x+\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}$

$a=1 \qquad b=\frac{1}{2} \qquad c=-\frac{1}{4} \qquad a+2b+4c=1+1-1=1$

۸-

$y=\frac{x}{\sqrt{x^2-2}} \xrightarrow{y_1=y_2} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-2}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-2}} \xrightarrow{()^2} \frac{x_1^2}{x_1^2-2}=\frac{x_2^2}{x_2^2-2}$

$x_1^2x_2^2-2x_1^2=x_1^2x_2^2-2x_2^2 \qquad x_1^2=x_2^2 \qquad x_1=\pm x_2$

x_1 و x_2 هم علامت باشند

پس $x_1=-x_2$ غیرقابل قبول است و $x_1=x_2$ ، پس تابع یک به یک است.

۲

در این صورت $y_1=y_2$ ولی برعکس نمی‌شود زیرا صفر جزو دامنه نیست.

$x=\frac{y}{\sqrt{y^2-2}} \xrightarrow{()^2} x^2=\frac{y^2}{y^2-2} \qquad y^2=\frac{-2x^2}{x^2-1}=\frac{2x^2}{x^2-1} \qquad y=\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-1}}$

زیرا x و y هم علامت باشند

$f^{-1}(x) = \frac{x}{|x|+1} = -\frac{۲}{۵}$ $\quad \frac{x}{-x+1} = -\frac{۲}{۵}$ $\quad ۵x = ۲x - ۲$

$۳x = -۲ \quad x = -\frac{۲}{۳}$

مخرج مثبت است

پس $x < ۰$

$f(-\frac{۲}{۵}) = -\frac{۲}{۳}$

$g(x) = \sqrt{x} - ۱ = -\frac{۲}{۵}$ $\quad \sqrt{x} = \frac{۳}{۵}$ $\quad x = \frac{۹}{۲۵}$

$g^{-1}(-\frac{۲}{۵}) = \frac{۹}{۲۵}$ ۵)

$f(-\frac{۲}{۵}) + g^{-1}(-\frac{۲}{۵}) = \frac{۹}{۲۵} - \frac{۲}{۳} = \frac{۲۷}{۷۵} - \frac{۵۰}{۷۵} = -\frac{۲۳}{۷۵}$

۱۰ -

$f^{-1}(x) = \sqrt[۳]{x-۱} \rightarrow x = \sqrt[۳]{y-۱}$ $\quad x^۳ = y - ۱$ $\quad y = x^۳ + ۱$

$f(x) = x^۳ + ۱$ ۵)

$g(x) = x^۳ + ۱ + \sqrt{x^۳ + ۱} = ۱۲ \rightarrow x = ۲$

$g^{-1}(۱۲) = ۲$