۲۰

نام و نام خانوادگی ..... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ..... کلاس .....

۱

$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{۴} & ; x\le ۱\\ \sqrt{x^۲+۱} & ; x>۱\end{cases}$

$f(\frac{۲}{۳})=\cos\frac{۲\pi}{۱۲}=\cos\frac{\pi}{۶}=\sqrt{۳}$

$f\circ f(\frac{۲}{۳})$

$f(\sqrt{۳})\xrightarrow{\sqrt{۳}>۱}\sqrt{(\sqrt{۳})^۲+۱}=۲$ (۲)

۲

$f\circ g(\sqrt{۲})\to g(\sqrt{۲}),\ \frac{\sqrt{۲}}{۱-\sqrt{۲}}\to\frac{\sqrt{۲}}{۱-\sqrt{۲}}\times\frac{۱+\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۲}}$

$=\frac{\sqrt{۲}+۲}{۱-۲}=-\sqrt{۲}-۲$ (۲)

$\cong -۳,۴$

$f(-\sqrt{۲}-۲)=[\underbrace{-\sqrt{۲}-۲}_{\cong ۱,۴}]=-۴$

الف)

$f\circ g(\frac{\pi}{۴})=g(\frac{\pi}{۴})=۲\underbrace{\cos^۲(\frac{\pi}{۳})}_{(\frac{۱}{۲})^۲}=\frac{۱}{۲}$

$f(\frac{۱}{۲})\to f(\frac{۱}{m})=\sqrt{\frac{۲m-۱}{m^۲}}\ m=۲\ f(\frac{۱}{۲})=\sqrt{\frac{۴-۱}{۴}}$

$f\circ g(\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳

$f(x)=\sin x \qquad g(x)=x\sqrt{۱-x^۲} \qquad g\circ f(\frac{\pi}{۴})$

$f(\frac{\pi}{۴})=\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ (۲)

$g(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sqrt{\underbrace{۱-۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲}_{۱-\frac{۱}{۲}}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sqrt{\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۱}{۲}$

۴

الف) $fog(x)=\{(۴,۵),(۲,۵),(۶,۱۲),(۸,۱۲)\}$

ب) $gof(x)=\emptyset$

ج) $fof(x)=\emptyset$ (۲)

د) $gog(x)=\{(۴,۸),(۶,۹),(۲,۹),(۶,۱۰)\}$ (۲)

۵

$g=\{(۱,۲),(۳,۱),(a,۳),(b,۱)\}$

$(a,b)?\to(a,b)=(۳,۵)$ (۲)

$f=\{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۵),(۱,۸)\}$

$(۱,۴)\in g\circ f$ (داخلی f)

$g(f(۴))=g(۵)=۱\to b=۵$

$(۴,۲)\in f\circ g$ (داخلی g)

$f(g(۴))=۲$

$g(۴)=۳\to a=۴$

۶

f, g پیدا کن: $f(f(x)) = 4x+3$, $g(2x+3) = 3x-2$, $g\circ f(-1) = ?$

$g(2x+3) = 3x-2$

$2x+3 = t$

$x = \frac{t-3}{2}$

$g(x) = \frac{3x-13}{2}$

$f(x) = ax+b$

$4x+3 = a(ax+b)+b$

$4x+3 = a^2x + ab + b$

$4 = a^2 \to a = \pm 2$

$a=-2: \; -2b+b=3 \to -b=3 \to b=-3$

$a=2: \; 2b+b=3 \to 3b=3 \to b=1$

$f(x) = 2x+1 \xrightarrow{x=-1} = -1$

$f(x) = -2x-3 \xrightarrow{x=-1} = -1$

$g(-1) = -8$

(۵)

۷

$g(x) = \frac{1}{x^2-4x}$, $f(x) = \sqrt{x+|x|}$, $D_{g\circ f} = ?$

$\frac{1}{x(x-4)} \to D_g = \mathbb{R} - \{0, 4\}$

(1) $D_f = \mathbb{R}$

$\{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$

$D_{g\circ f} = (0, +\infty) - \{8\}$

(2) $\sqrt{x+|x|} \neq \{0, 4\}$

$\sqrt{x+|x|} \neq 0 \to x > 0$

$\sqrt{x+|x|} \neq 4 \to x+|x| \neq 16 \xrightarrow{x>0} 2x \neq 16 \to x \neq 8$

(۵)

۸

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = \sqrt{x}$, $D_{(f+g)\circ f} ?$ $= [-1, 1]$

$D_f \Rightarrow (1-x)(1+x)$: -1, $+1$; $- \; + \; -$

$D_g = [0, +\infty)$

$\{x \in D_f : f(x) \in D_{f+g}\}$

(1) $D_f = [-1, 1]$

$\sqrt{1-x^2} \in [0, 1] \xrightarrow{2} 0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1 \xrightarrow{\text{توان } 2} 0 \leq 1-x^2 \leq 1$

$\to -1 \leq -x^2 \leq 0 \to 1 \geq x^2 \geq 0 \to -1 \leq x \leq 1$ (2)

$D_{(f+g)} \Rightarrow D_f \cap D_g \to [-1, 1] \cap [0, \infty) \to [0, 1]$

(۵)

۹

الف) $f\left(\frac{3x+1}{x-2}\right) = 4x+5$

$\frac{3x+1}{x-2} = t \to x = \frac{-2t-1}{-(t-3)} = \frac{2t+1}{t-3}$

$f(x) = 4\left(\frac{2x+1}{x-3}\right) + 5 = \frac{8x+4}{x-3} + 5$

$= \frac{8x+4+5x-15}{x-3} = \frac{13x-11}{x-3}$

ب) $f\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$

$x + \frac{1}{x} = t$

$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)}_{t} = t^3$

$x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t \to f(x) = x^3 - 3x$

(۵)

۱۰

$g(1) = 0 \to g(f(x)) = 0 \to f(x) = x\sqrt{x} = 1 \to x_1 = 1$

$g(2\sqrt{2}) = 0 \to g(f(x)) = 0 \to f(x) = x\sqrt{x} = 2\sqrt{2} \to x_2 = 2$

$x_2 - x_1 = 2 - 1 = 1$

(۵)