(تکلیف ۹) <فاطمه شکرانی> (یازدهم رض B)

$$f(x)\begin{cases}\cot\frac{\pi x}{۴} & ; x\leq ۱\\ \sqrt{x^۲+۱} & ; x>۱\end{cases}$$

$f\circ f(\frac{۲}{۳}) =$ $f(\frac{۲}{۳}) = \cot\frac{\pi\frac{۲}{۳}}{۴} = \frac{\pi}{۶} \to \sqrt{۳}$

$f(\sqrt{۳}) = \sqrt{(\sqrt{۳})^۲+۱} = ۲$

①

الف) $f(\frac{۱}{x}) = \sqrt{\frac{۲x-۱}{x^۲}} = \sqrt{\frac{۲}{x}-\frac{۱}{x^۲}}$

$g(x) = ۲\cos^۲ x$ $f(x) = \sqrt{۲x-x^۲}$

$f\circ g\ (\frac{\pi}{۳}) = ?$

$g(\frac{\pi}{۳}) = ۲\underbrace{\cos^۲(\frac{\pi}{۳})}_{\frac{۱}{۴}} = \frac{۱}{۲}$

$f(\frac{۱}{۲}) = \sqrt{۲(\frac{۱}{۲})-\frac{۱}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

ب) $f(x) = [x]$

$g(x) = \frac{x}{۱-x}$

$f\circ g(\sqrt{۲}) =$

$g(\sqrt{۲}) = \frac{\sqrt{۲}}{۱-\sqrt{۲}} \times \frac{۱+\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۲}} = -۲-\sqrt{۲}$

$f(-۲-\sqrt{۲}) = [-۲-\sqrt{۲}] = -۴$

②

$f(x) = \sin x$ $g(x) = x\sqrt{۱-x^۲}$ $g\circ f(\frac{\pi}{۴}) = ?$

$g(f(x)) = \sin x\underbrace{\sqrt{۱-\sin^۲ x}}_{|\cos x|} = \sin\frac{\pi}{۴}\left|\cos\frac{\pi}{۴}\right| = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۱}{۲}$

③

الف) $f\circ g(x)$

$۴\to۶\to۵$
$۲\to۴\to۵$
$۶\to۸\to۱۲$
$۸\to۱۰\to۱۲$

$f\circ g(x) = \{(۴,۵)(۲,۵)(۶,۱۲)(۸,۱۲)\}$

$g(x) = \{(۴,۶)(۲,۴)(۶,۸)(۸,۱۰)\}$

$f(x) = \{(۴,۵)(۶,۵)(۸,۱۲)(۱۰,۱۲)\}$

ب) $g\circ f(x)$

$۴\to۵\to\times$
$۶\to۵\to\times$
$۸\to۱۲\to\times$
$۱۰\to۱۲\to\times$

$g\circ f(x) = \varnothing$

ج) $f\circ f(x)$

$۴\to۵\to\times$
$۶\to۵\to\times$
$۸\to۱۲\to\times$
$۱۰\to۱۲\to\times$

$f\circ f(x) = \varnothing$

د) $g\circ g(x)$

$۴\to۶\to۸$
$۲\to۴\to۶$
$۶\to۸\to۱۰$
$۸\to۱۰\to\times$

$g\circ g(x) = \{(۴,۸)(۲,۶)(۶,۱۰)\}$

④

$f(x) = \{(۲,۱)(۳,۲)(۴,۵)(۱,۷)\}$

$g = \{(۱,۲)(۳,۱)(a,۳)(b,۱)\}$

$(۴,۲)\in f\circ g \Rightarrow$ $\square \xrightarrow{g(x)} ۳ \xrightarrow{f(x)} ۲$ ⇝ پس زوج $(a,۳)$ بوده، $a = ۴$

$(۴,۱)\in g\circ f \Rightarrow$ $۴ \xrightarrow{f(x)} ۵ \xrightarrow{g(x)} ۱$

زوج $(b,۱)$ بوده، $b = ۵$

$(a,b) = ?$

⇝ $(۴,۵)$

⑤

۶

$f(f(x)) = ۴x+۳$ $\quad$ $f(f(x)) = a(ax+b)+b$ $\quad$ $f(x)=ax+b$

$g(۲x+۳) = ۳x-۲$ $\quad$ $a^۲x + ab + b = ۴x+۳$

$\boxed{g\circ f(-۱) = ? \quad -۸}$ $\quad$ $a^۲ = ۴ \quad ab+b = ۳ \quad \begin{cases} a=۲ \\ b=۱ \end{cases}$ یا $\begin{cases} a=-۲ \\ b=-۳ \end{cases}$

$g(۲x+۳)=۳x-۲$

$۲x+۳=t \quad x=\frac{t-۳}{۲}$

$g(x)=۳\left(\frac{t-۳}{۲}\right)-۲=\frac{۳t-۱۳}{۲} \Rightarrow \frac{۳x-۱۳}{۲}=g(x)$

$f(-۱)=۲(-۱)+۱=-۱ \quad g(-۱)=\frac{-۱۶}{۲}=\underline{\underline{-۸}}$ یا $f(-۱)=-۲(-۱)-۳=-۱ \quad g(-۱)=\frac{-۱۶}{۲}=-۸$

۷

$f(x)=\sqrt{x+|x|}$ $\quad$ $g(x)=\frac{۱}{x^۲-۴x}$ $\quad$ $D_{g\circ f}=? \{x\in D_f : f(x)\in D_g\}$

$D_f=R$ $\quad$ $D_g=R-\{۰,۴\}$ $\quad$ $\{x\in R \cap \sqrt{x+|x|}\in R-\{۰,۴\}\}$

$\sqrt{x+|x|}\neq ۰ \rightsquigarrow x>۰$

$\sqrt{x+|x|}\neq ۴$

$x+|x|\neq ۱۶ \to x\neq ۸$

$\boxed{D_{g\circ f}=(۰,+\infty)-\{۸\}}$

۸

$f(x)=\sqrt{۱-x^۲} \quad ۱-x^۲\geq ۰ \quad \begin{array}{ccccc} & -۱ & & +۱ & \\ - & | & + & | & - \end{array} \quad D_f=[-۱,+۱]$

$g(x)=\sqrt{x} \quad x\geq ۰ \quad [۰,+\infty)=D_g$

$D_{(f+g)\circ f}=\{x\in D_f : f(x)\in D_{(f+g)}\}=\{-۱\leq x\leq ۱ ، ۰\leq\sqrt{۱-x^۲}\leq ۱\}$

$-۱\leq x\leq ۱$

$D_{(f+g)}=D_f\cap D_g=[۰,۱]$

$D_{(f+g)\circ f}=[-۱,۱]$

۹

الف) $f\left(\frac{۳x+۱}{x-۲}\right)=۴x+۵$

$\frac{۳x+۱}{x-۲}=t$

$۳x+۱=tx-۲t$

$۳x-tx=-۱-۲t$

$x=\frac{۱+۲t}{t-۳}$ $\quad$ $f(x)=۴\left(\frac{۱+۲t}{t-۳}\right)+۵=\frac{۴+۸t+۵t-۱۵}{t-۳} \Rightarrow \frac{۱۳t-۱۱}{t-۳}$

$f(x)=\frac{۱۳x-۱۱}{x-۳}$

ب) $f\left(x+\frac{۱}{x}\right)=x^۳+\frac{۱}{x^۳}$ $\quad$ $f(x)$ را پیدا کنید ؟

$\left(x+\frac{۱}{x}\right)^۳=x^۳+\frac{۱}{x^۳}+۳x^۲\frac{۱}{x}+۳x\frac{۱}{x^۲}$

$\left(x+\frac{۱}{x}\right)^۳-۳\left(x+\frac{۱}{x}\right)\left(\underbrace{x\times\frac{۱}{x}}_{۱}\right)$

$f(x)=x^۳-۳x$

۱۰

نمودار تابع g و محور x ها را در نقطه به طول ۱، $۲\sqrt{۲}$ قطع می کند اگر $f(x)=x\sqrt{x}$ ، اختلاف طول نقاطی که نمودار تابع $g\circ f(x)$ محور x ها را قطع می کند کدام است ؟

$x\sqrt{x}=۱ \to x=۱$

$x\sqrt{x}=۲\sqrt{۲} \to x=۲$ $\quad$ $۲-۱=۱$