آرمیس اکبری

تکلیف ۵

یازدهم دفتر 13

سوال ①

$f(x)=(\frac{۱}{۲})^{x-۲}-۱ \rightarrow f(x+۱)=(\frac{۱}{۲})^{x+۱-۲}-۱=(\frac{۱}{۲})^{x-۱}-۱=۲^{۱-x}-۱$

$y=\sqrt{x^۳ f(x+۱)} \Rightarrow x^۳(۲^{۱-x}-۱)\geq ۰$

x		۰		۱	
$x^۳$	−	۰	+		+
$۲^{۱-x}-۱$	+		+	۰	−
	−	۰	+	۰	−

$\boxed{D_f=[۰,۱]}$

سوال ②

$f(x)=\sqrt{x+|x+۲|} \rightarrow f(-x)=\sqrt{-x+|-x+۲|} \rightarrow \begin{cases} x>۲ \rightarrow \sqrt{-x+x-۲}=\sqrt{-۲} \quad \text{غ ق ق} \\ x<۲ \rightarrow \sqrt{-x-x+۲}=\sqrt{-۲x+۲} \rightarrow -۲x+۲\geq ۰ \rightarrow x\leq ۱ \end{cases}$

$\boxed{D_f=(-\infty,۱]}$

سوال ③

$y=\sqrt{\frac{x-۱}{f(x)}} \Rightarrow \frac{x-۱}{f(x)}\geq ۰$

$x-۱ \rightarrow x=۱$

$f(x) \rightarrow x=-۴,۲,۳$

x		-۴		۱		۲		۳
$x-۱$	−		−	۰	+		+	
$f(x)$	+	۰	−		−	۰	+	۰
$\frac{x-۱}{f(x)}$	−	∄	+	۰	−	∄	+	∄

$\boxed{D_f=(-۴,۱]\cup(۲,۳)}$

سوال ④

$y_۱=\frac{۱}{۹x^۴-۷x^۲-۴x-۳} \qquad y_۲=\frac{۱}{۳x^۲+ax+b}$ ریشه‌ها یکسان نیست [illegible] صفرشون مطرح است

$۹x^۴-۷x^۲-۴x-۳=۹x^۴-۶x^۲-x^۲-۴x-۴+۱=\underbrace{(۹x^۴-۶x^۲+۱)}_{(۳x^۲-۱)^۲}\underbrace{-x^۲-۴x-۴}_{-(x+۲)^۲}$

$(۳x^۲-۱)^۲-(x+۲)^۲\neq ۰ \rightarrow ۳x^۲-۱\neq x+۲ \rightarrow ۳x^۲-x-۳\neq ۰$

$۳x^۲-x-۳=۳x^۲+ax+b \rightarrow \boxed{\begin{matrix} a=-۱ \\ b=-۳ \end{matrix}}$

$\sqrt{-(a+b)}=\sqrt{۴}=\boxed{۲}$

سوال ⑤

$f(x)=x^۳+x$

$y=\sqrt{f(x)-f(\frac{۴}{x})} \Rightarrow \sqrt{x^۳+x-(\frac{۴}{x})^۳-\frac{۴}{x}} \rightarrow x^۳+x-(\frac{۴}{x})^۳-\frac{۴}{x}\geq ۰$ ● ★ $x^۳-(\frac{۴}{x})^۳=(x-\frac{۴}{x})(x^۲+۴+\frac{۱۶}{x^۲})$

$f(x)-f(\frac{۴}{x})\geq ۰ \rightarrow (x-\frac{۴}{x})+(x^۲+۴+\frac{۱۶}{x^۲})(x-۴) \rightarrow (x-\frac{۴}{x})(\underbrace{x^۲+۴+\frac{۱۶}{x^۲}+۱}_{\text{همیشه مثبت}})\geq ۰$

همیشه مثبت پس $x-\frac{۴}{x}\geq ۰$ باید باشد

$x-\frac{۴}{x}\geq ۰ \rightarrow \frac{x^۲-۴}{x}\geq ۰$

x		-۲		۰		۲	
	−	۰	+	∄	−	۰	+

$\boxed{D_f=[-۲,۰)\cup[۲,+\infty)}$

سوال ⑥

$f(x^۳+x)=۲x^۲-۱$

$\left.\begin{matrix} f(۲) \Rightarrow x^۳+x=۲ \rightarrow x=۱ \rightarrow ۲\times ۱-۱=۱ \\ f(۱۰) \Rightarrow x^۳+x=۱۰ \rightarrow x=۲ \rightarrow ۲\times ۴-۱=۷ \end{matrix}\right\} \rightarrow f(۲)+f(۱۰)=۱+۷=\boxed{۸}$

سوال ۷

$f(x) = x^۳ - ۶x^۲ + ۱۲x \quad , \quad g(x) = x^۳ + ۹x^۲ + ۲۷x$

$\hookrightarrow f(x) = (x-۲)^۳ + ۸ \qquad \llcorner\!\to g(x) = (x+۳)^۳ - ۲۷$

$$\frac{g(\sqrt[۳]{۷} - ۳)}{f(\sqrt[۳]{۲} + ۲)} = \frac{(\sqrt[۳]{۷} - ۳ + ۳)^۳ - ۲۷}{(\sqrt[۳]{۲} + ۲ - ۲)^۳ + ۸} = \frac{(\sqrt[۳]{۷})^۳ - ۲۷}{(\sqrt[۳]{۲})^۳ + ۸} = \frac{-۲۰}{۱۰} = \boxed{-۲}$$

سوال ۸

$f(x) = \sqrt{x + ۴\sqrt{x-۴}} \longrightarrow \sqrt{x - ۴ + ۴\sqrt{x-۴} + ۴} = \sqrt{(\sqrt{x-۴} + ۲)^۲}$

$g(x) = \sqrt{x - ۴\sqrt{x-۴}} \rightarrow \sqrt{x - ۴ - ۴\sqrt{x-۴} + ۴} = \sqrt{(\sqrt{x-۴} - ۲)^۲}$

$f(x) + g(x) = |\sqrt{x-۴} + ۲| + |\sqrt{x-۴} - ۲| \xrightarrow{x \geq ۴} \sqrt{x-۴} + ۲ + \sqrt{x-۴} - ۲ = ۲\sqrt{x-۴}$

$۲\sqrt{x-۴} = a + b\sqrt{x+c} \Rightarrow \begin{cases} a+b = ۲ \\ c = -۴ \end{cases}$

$$\frac{a+b}{c} = \boxed{\frac{۲}{-۴} = \frac{-۱}{۲}}$$

سوال ۹

$g(x) = \{(۲,۱), (۱,۰), (۳,۵), (۰,۴)\}$

$f(x) = \dfrac{x+۲}{x^۲ - ۴x + ۳} \rightarrow f(x) = \{(۲,-۴), \cancel{(۱,\tfrac{۳}{۰})}, \cancel{(۳,\tfrac{۵}{۰})}, (۰,\tfrac{۲}{۳})\}$

$$\frac{g}{f} = \boxed{\{(۲, -\tfrac{۱}{۴}), (۰,۶)\}}$$

سوال ۱۰

الف) $f(۲x) = \{(\tfrac{۱}{۲},۳), (\tfrac{۳}{۲},-۱), (۲,۲)(-\tfrac{۱}{۲},۶)\}$

ب) $f(x^۲) = \{(۱,۲), (-۱,۲), (\sqrt{۳},-۱)(-\sqrt{۳},-۱)(۲,۲)(-۲,۲)\}$

ج) $۲g^۲(x) + ۱ = \{(-۲,۱۹), (۱,۳), (۳,۹), (-۱,۱)\}$

د) $\dfrac{۲f}{g} = \{(۱,-۴), (۳,-۱)\}$