مقدار $\log_n^m = a$ و $\log_{mn}^{m^2n} = b$ است اگر $a>0$ باشد. حاصل $[b]$ چند است؟

$n^a = m$

$\log_{mn}^{m^2n} = b \Rightarrow \log_{n^a \times n}^{n^{2a} \times n} = b \Rightarrow \log_{n^{a+1}}^{n^{2a+1}} = b \rightarrow \frac{2a+1}{a+1}\log_n^n = b \Rightarrow \left[\frac{a+a+1}{a+1}\right] = [b]$ 1

$\left[1 + \frac{a}{a+1}\right] = [b] \Rightarrow 1 + \left[\frac{a}{a+1}\right] = [b] \Rightarrow 0 < \frac{a}{a+1} < 1 \Rightarrow \boxed{[b] = 1}$ ۲

دامنه عبارت های زیر را بیابید.

الف) $y = \sqrt{\frac{x}{\log_{1/2}^x}}$

$x > 0$ ⊙

$\log_{1/2}^x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ ⊙

$D_f = (0, 1)$

ب) $y = \frac{\log_4^{(x^2-x-2)}}{\sqrt{x^2-1}+1}$

$x^2-x-2 > 0$

$x = -1$

$x = -c/a = 2$

$\sqrt{x^2-1} \neq -1$ ✓ همواره برقرار

$x^2-1 \geq 0$

$(x-1)(x+1) \geq 0$

$D_f = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ ۲ 2

اگر در معادله $2\log_x^a + \log_a^{\sqrt{x}} = 2$ مقدار x برابر ۹ باشد مقدار a را بیابید؟

$2\log_x^a + \log_a^{x^{1/2}} \Rightarrow 2\log_x^a + \frac{1}{2}\log_a^x \Rightarrow 2\log_x^a + 2\log_x^a = 2$

$\log_x^a = \frac{2}{4} \rightarrow a = x^{1/2} \Rightarrow x = 9 \rightarrow a = 9^{1/2} \Rightarrow \sqrt{9} \Rightarrow \boxed{a = 3}$ ۲ 3

اگر $\log 2 \simeq 0.3$ ، $\log 3 \simeq 0.4$ اختلاف ریشه های معادله $(\log \frac{5}{3})x^2 + (\log 9)x - \log 15 = 0$ را بیابید؟

$(\log 5 - \log 3)x^2 + (2\log 3)x - (\log 3 + \log 5) = 0 \Rightarrow$ جمع ضرایب $= 0 \Rightarrow x = 1$

$x = c/a$ ۲

$\frac{c}{a} = \frac{-\log 3 - \log 5}{\log 5 - \log 3} = \frac{-0.4 - \log 10 + \log 2}{\log 10 - \log 2 - 0.4} = \frac{-0.4 - 1 + 0.3}{1 - 0.3 - 0.4} = \frac{-1.1}{0.3} \Rightarrow -11/3$ 9

$x_1 - x_2 = 1 - (-11/3) = \boxed{14/3}$

اگر مقدار تقریبی $\log_2^7 = 2.8$ ، $\log_5^2 = 0.5$ باشد حاصل $\log_{14}^{10}$ را بیابید؟

$\log_5^2 \times \log_2^7 = 0.5 \times 2.8 \Rightarrow \log_5^7 = 1.4$

$\log_{14}^{10} = \frac{\log_5^{10}}{\log_5^{14}}$

$\log_{14}^{10} = \frac{\log_5^2 + \log_5^5}{\log_5^2 + \log_5^7} = \frac{0.5+1}{0.5+1.4} = \frac{1.5}{1.9} = \boxed{\frac{15}{19}}$ ۲ 5

Scanned with CamScanner

اگر مقدار تقریبی $\log_3^5 = 1.5$ و $\log_2^3 = 1.6$ باشد حاصل $\log_{15}^{6}$ را بیابید؟

$$\log_3^5 \times \log_2^3 = \log_2^5 = 2.4$$

$$\log_{15}^{6} = \frac{\log_2^6}{\log_2^{15}} \Rightarrow \frac{\log_2^2 + \log_2^3}{\log_2^3 + \log_2^5} = \frac{1+1.6}{1.6+2.4} = \frac{2.6}{4} = \frac{1.3}{2} = \boxed{0.65}$$

6

اگر $\log_8^{18} = m$ باشد حاصل $\log_4^{12}$ را بیابید؟

$$\log_4^{12} = \frac{\log_8^{12}}{\log_8^4} \Rightarrow \log_8^{12} = \log_8^4 + \log_8^3 \Rightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\log_2^3$$

$$\log_8^4 = \frac{2}{3}\log_2^2 = \frac{2}{3}$$

$$\log_8^{18} = m \rightarrow \log_8^9 + \log_8^2 = m \Rightarrow \frac{2}{3}\log_2^3 + \frac{1}{3}\log_2^2 = m \Rightarrow \frac{2}{3}\log_2^3 + \frac{1}{3} = m$$

7

$$\log_2^3 = \frac{3m-1}{2} \qquad \log_4^{12} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\log_2^3}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{3m-1}{2}\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{4+3m-1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}(m+1)}$$

اگر $(0.4)^{2n-1} = \left(\frac{125}{8}\right)^{n^2}$ باشد $\log_8^{(9n+1)}$ را بیابید؟

$$\left(\frac{4}{10}\right)^{2n-1} = \left(\frac{5^3}{2^3}\right)^{n^2} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{2n-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3n^2} \Rightarrow 2n-1 = -3n^2$$

$$3n^2 + 2n - 1 = 0 \Longrightarrow n^2 + 2n - 3 = 0 \Longrightarrow \left(n + \frac{3}{3}\right)\left(n - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$n = -1 \Rightarrow$ غیرقابل قبول $\rightsquigarrow 9n+1 = -9+1 = -8$ تبدیل منفی شود در پایه قرار نمی‌گیرد.

$$n = \frac{1}{3} \checkmark \Rightarrow \log_{2^3}^{(3+1)} = \log_{2^3}^{2^2} = \frac{2}{3}\log_2^2 = \boxed{\frac{2}{3}}$$

8

اگر $\log_2^3 = a$ و $\log_8^b = \frac{2}{3}(1+a)$ باشد مقدار $\log(3b-8)$ را بیابید؟

$$\frac{1}{3}\log_2^b = \frac{2}{3}(a+1) \rightarrow \log_2^b = 2a+2$$

$$2^{2a+2} = b \qquad (2^a)^2 \times 4 = 36 \rightarrow b = 36$$

$$\log(3b-8) \Rightarrow \log(100) = \boxed{2}$$

9

اگر عکس مجموع ریشه‌های معادله درجه دوم $-4ax^2 + bx + \frac{1}{2}c = 0$ برابر $\log 4$ و واسطه حسابی c و b باشد مقدار $\left(\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\right)^{c/a}$ را بیابید؟

$$S = \frac{-b}{-4a} \Rightarrow \frac{b}{4a} = \log 4 \rightsquigarrow \frac{a}{b} = \frac{\log 4}{4} = \frac{2\log 2}{2} = \frac{\log 2}{2} \quad (1)$$

$$2a = b + c \xrightarrow{\text{تقسیم بر } b} 2\frac{a}{b} = 1 + \frac{c}{b} \rightsquigarrow \text{با توجه به اینکه } \frac{a}{b} = \frac{\log 2}{2} \Rightarrow 2\left(\frac{\log 2}{2}\right) = 1 + \frac{c}{b}$$

$$\frac{c}{b} = -1 + \log 2 \xrightarrow{(1),(2)} \frac{c}{a} = \frac{-1+\log 2}{\frac{\log 2}{2}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{\log 2 - \log 10}{\frac{1}{2}\log 2} = \frac{\log\frac{2}{10}}{\frac{1}{2}\log 2} = \frac{\log\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}\log 2}$$

$$\frac{\log\frac{1}{5}}{\log\sqrt{2}} = \log_{\sqrt{2}}^{\frac{1}{5}} \rightsquigarrow \left(\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\right)^{c/a} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{\sqrt[8]{2}}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{2^{\frac{1}{4}}}} \Rightarrow \frac{1}{5}^{\left(-\frac{1}{2}/\frac{1}{4}\right)\log_2^2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{4}} = \boxed{\sqrt[4]{5}}$$

10

Scanned with CamScanner