آرشا سریعی — تکلیف شماره ۲۳ — یازدهم دفتر B

① $\log_n m = a \qquad \log_{mn} m^2 n = b$

$\to \frac{\log m}{\log n} = a \qquad \to \frac{2\log m + \log n}{\log m + \log n} \xrightarrow{\div \frac{\log n}{\log n}}$

$$\frac{\frac{2\log m}{\log n}+1}{\frac{\log m}{\log n}+1} = \frac{2\log_n m + 1}{\log_n m + 1} = \frac{2a+1}{a+1} = b$$

$$\Rightarrow 1 \leqslant \underbrace{\frac{a+1}{a+1}}_{1} + \frac{a}{a+1} < 2 \to [b] = 1$$

②

الف) $y = \sqrt{\frac{x}{\log_{\frac{1}{2}} x}} \to x > 0$ I $\qquad \frac{x}{\log_{\frac{1}{2}} x} \geqslant 0$

	0		1	
−	ص	+	تن	−

$(0, +\infty) \cap [0, +1) \Rightarrow D_y = (0, 1)$

ب) $y = \frac{\log_4 (x^2 - x - 2)}{\sqrt{x^2 - 1} + 1}$

I $\to x^2 - x - 2 > 0 \to \Delta = 1 + 8 = 9 \qquad x = \frac{1 \pm 3}{2} = 2, -1$

	−1		2	
+	ص	−	ص	+

$\to (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

II $x^2 - 1 \geqslant 0 \to x^2 \geqslant 1 \cdot \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x \leqslant -1 \end{cases}$

I $\cap$ II $\to (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

(۳)

$$۲\log_{x}^{۹} + \log_{a}^{\sqrt{x}} = ۲ \qquad x = ۹$$

$$۲\log_{۹}^{a} + \log_{a}^{۳} = ۲ \Rightarrow ۲\log_{۳^{۲}}^{a} + \log_{a}^{۳} = ۲$$

$$= \frac{۱}{۲}\times ۲\log_{۳}^{a} + \log_{a}^{۳} = \underbrace{\log_{۳}^{a}}_{t} + \log_{a}^{۳} = ۲$$

$$t + \frac{۱}{t} = ۲$$

$$\Rightarrow t^{۲} - ۲t + ۱ = ۰ \Rightarrow (t-۱)^{۲} = ۰ \Rightarrow t = ۱$$

$$\log_{۳}^{a} = ۱ \Rightarrow a = ۳$$

(۴)

$$\left(\log\frac{۵}{۳}\right)x^{۲} + (\log ۹)x - \log ۱۵ = ۰$$

$$\underbrace{(\underbrace{(\log ۱۰ - \log ۲)}_{۰/۷} - \log ۳)}_{۰/۳}x^{۲} + (\underbrace{۲\log ۳}_{۰/۸})x - (\underbrace{(۱-\log ۲) + \log ۳}_{۱/۱})$$

$$\Rightarrow (۰/۳)x^{۲} + (۰/۸)x - ۱/۱ = ۰$$ اختلاف ریشه‌ها $= \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

$$\frac{\sqrt{(۰/۸)^{۲} + ۴(۰/۳)(۱/۱)}}{۰/۳} = \frac{\sqrt{۰/۶۴ + ۱/۳۲}}{(۰/۳)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۱/۹۶}}{۰/۳} = \frac{۱/۴}{۰/۳} = \frac{۱۴}{۳}$$

(۵)

$$\log_{۵}^{۲} = ۰/۵ \qquad \log_{۲}^{۷} = ۲/۸$$

$$\log_{۱۴}^{۱۰} = \frac{\log_{۲}^{۱۰}}{\log_{۲}^{۱۴}} = \frac{\log_{۲}^{۵} + \cancel{\log_{۲}^{۲}}\ ۱}{\log_{۲}^{۷} + \cancel{\log_{۲}^{۲}}\ ۱} = \frac{۲+۱}{۲/۸+۱} = \frac{۳}{۳/۸} = ۰/۷۹$$

$$\log_{۵}^{۲} = ۰/۵ \Rightarrow \frac{۱}{\log_{۲}^{۵}} = ۰/۵ \Rightarrow \log_{۲}^{۵} = ۲$$

۶

$\log_{۳}^{۵} = ۱/۵$ $\qquad$ $\log_{۲}^{۳} = ۱/۶$

$$\log_{۱۵}^{۶} \Rightarrow \frac{\log_{۲}^{۶}}{\log_{۲}^{۱۵}} = \frac{\log_{۲}^{۲} + \log_{۲}^{۳}}{\log_{۲}^{۳} + \log_{۲}^{۵}} \rightarrow \log_{۳}^{۵} \times \log_{۲}^{۳} = \log_{۲}^{۵}$$

$(۱)\ ۲/۴$

$$= \frac{۱ + ۱/۶}{۱/۶ + ۲/۴} = \frac{۲/۶}{۴} = \boxed{۰/۶۵}$$

۷

$\log_{۸}^{۱۸} = m$ $\qquad$ $\log_{۴}^{۱۲} = ?$

$$\frac{۱}{۳}\left(\log_{۲}^{۱۸}\right) = m \Rightarrow ۳m = \log_{۲}^{۲^{۱}} + ۲\log_{۲}^{۳}$$

$$\Rightarrow \log_{۲}^{۳} = \frac{۳m-۱}{۲}$$

$$\log_{۴}^{۱۲} = \frac{۱}{۲}\left(\log_{۲}^{۴} + \log_{۲}^{۳}\right) = \cancel{\log_{۲}^{۲}}^{\,۱} + \frac{۱}{۲}\log_{۲}^{۳}$$

$$۱ + \frac{۱}{۲}\left(\frac{۳m-۱}{۲}\right) = ۱ + \frac{۳m-۱}{۴} = \boxed{\frac{۳m+۳}{۴}}$$

۸

$(۰/۴)^{۲x-۱} = \left(\frac{۱۲۵}{۸}\right)^{x^۲}$ $\qquad$ $\log_{۸}(۹x+۱) = ?$

$$\left(\frac{۵}{۲}\right)^{-۲x+۱} = \left(\frac{۵}{۲}\right)^{۳x^۲} \qquad \begin{cases} x = -۱ \\ x = \frac{۱}{۳} \end{cases}$$

$$\log_{۸}^{(۹(-۱)+۱)} = \log_{۸}^{-۸} \rightarrow \times$$

$$\log_{۸}^{(۹(\frac{۱}{۳})+۱)} = \log_{۸}^{۴} = \frac{۲}{۳}\log_{۲}^{۲} = \boxed{\frac{۲}{۳}}$$

۹

$\log_2 3 = a \qquad \log_8 b = \frac{2}{3}(1+a) \qquad \log(3b-8) = ?$

$\frac{1}{\cancel{3}}(\log_2 b) = \frac{2}{\cancel{3}}(1+a) \Rightarrow \log_2 b = 2 + 2\log_2 3$

$\log_2 b - \log_2 2^2 = 2\log_2 3 \Rightarrow \log_2 \frac{b}{4} = \log_2 9$

$\Rightarrow \frac{b}{4} = 9 \Rightarrow b = 36$

$\log(3b-8) = \log_{10} (108-8) = \boxed{2}$

۱۰

$-4ax^2 + bx + \frac{1}{4}c = 0$

جمع ریشه‌ها $= \frac{4a}{b} = \log 4 = 2\log 2 \qquad \frac{a}{b} = \frac{2\log 2}{4} = \frac{\log 2}{2}$

$4a = b + c$

$\Rightarrow 2a = b + c \Rightarrow \frac{2a}{b} = 1 + \frac{c}{b} \quad . \quad 2\left(\frac{\log 2}{2}\right) = 1 + \frac{c}{b}$

$\begin{cases} \frac{c}{b} = -1 + \log 2 \\ \frac{a}{b} = \frac{\log 2}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{-1+\log 2}{\frac{\log 2}{2}} \Rightarrow \frac{\log 2 - \log 10}{\frac{1}{2}\log 2}$

$= \frac{\log \frac{2}{10}}{\frac{1}{2}\log 2}$

$= \frac{\log \frac{1}{5}}{\underbrace{\frac{1}{2}\log 2}_{\log\sqrt{2}}} = \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{5}$

$\left(\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\right)^{\frac{c}{a}} = \left(\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\right)^{\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt[8]{2}}}$

$= \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^{\frac{-1}{8}}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{-1}{4}} = \sqrt[4]{5}$