

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4 & ; x > 9 \\ 12x - 20 & ; x \leq 9 \end{cases}$$

عدد a به طوری که تابع f یک به یک باشد

$$\begin{cases} a^3 - 4 \\ 12a - 20 \end{cases} \Rightarrow 12a - 20 < a^3 - 4 \Rightarrow a^3 - 12a + 14 > 0$$

$\Rightarrow a > 2$ (چون $a \geq 1$ و $a \geq 3$ مقبول است)

۱

$$f(x) = 3x + \frac{1}{x-1} \quad f^{-1}(x) = x \rightarrow 12 + 1 < 22$$

$\rightarrow f(5) = 22 \rightarrow 10$

الف) $F(7) = 3(7) - 10 = 11$

۲

$$\therefore f(f(x)) = f(3x - 10) = 3(3x - 10) - 10 \Rightarrow 9x - 30 - 10 = 9x - 40$$

$$f(x) = \frac{ax}{x-1}$$

اگر نقطه $A(a, a)$ روی معکوس تابع f باشد $a \in \mathbb{R}$
 $(a, a) \rightarrow (a, 2a)$ (معکوس)

$$f(a) = \frac{a^2}{a-1} = 2a \Rightarrow a^2 = 2a^2 - 2a \Rightarrow a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(a-2) = 0$$

واریان $a \geq 0$ $\rightarrow a = 2$
 غ ق ق

۳

$$F^{-1} = \{(5, 3), (7, 5), (9, 7), (4, 9)\} \quad g^{-1} = \{(2, 3), (4, 1), (5, 9)\}$$

$$\text{الف) } f \circ f^{-1} = \{(5, 5), (7, 7), (2, 2), (4, 4)\}$$

$$\therefore f \circ f = \{(3, 3), (4, 4), (7, 7), (9, 9)\}$$

$$\text{ج) } f \circ g^{-1} = \{(2, 5), (5, 4)\}$$

$$\text{د) } g^{-1} \circ f = \{(3, 9), (7, 3), (9, 1)\}$$

۴

$$f = \{(2, 4), (4, 1), (4, 0)\} \quad g = \{(2, 1), (4, 3), (4, 0)\} \quad h = \{(1, 2), (3, 4), (4, 0), (5, 1)\}$$

$g^{-1} = \{(1, 2), (3, 4), (0, 4)\}$

$$\frac{h}{f \circ g^{-1}} = \{(4, \frac{1}{4}), (5, \frac{1}{5})\}$$

$$\rightarrow \{(1, 4), (3, 1), (5, 0)\}$$

۵

$y = \frac{3x+1}{x-2}$

میانبر قائم: y

میانبر افق: $\frac{q}{c} = 3$

معکوس معکوس: $y = \frac{3x+1}{x-2} \Rightarrow x = \frac{3y+1}{y-2}$

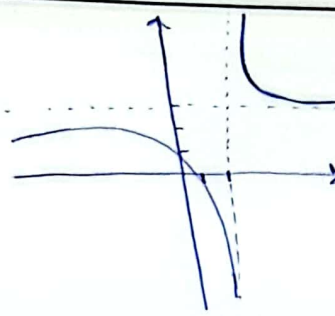
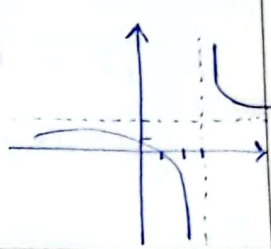
$xy - 2x = 3y + 1$

$y = \frac{3x+1}{x-2}$

میانبر قائم: y

میانبر افق: $\frac{q}{c} = 2$

معکوس معکوس

$f(x) = |x-1| - |x-3| \rightarrow [a, b]$

$\begin{cases} -x+1+x-3 & x < 1 \\ x-1+x-3 & 1 \leq x \leq 3 \\ x-1-x+3 & x > 3 \end{cases}$

$x < 1 \Rightarrow f(x) = -2$

$1 \leq x \leq 3 \Rightarrow f(x) = 2x-4$

$x > 3 \Rightarrow f(x) = 2$

$F(x) = 2x-4 \Rightarrow y = 2x-4 \Rightarrow x = \frac{y+4}{2}$

$f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2}, x \in [-2, 2]$

$f(x) = \begin{cases} x^3+5 & x \geq 1 \\ 5x-1 & x \leq 0 \end{cases}$

$x \geq 1 \rightarrow 1+5 \leq y \leq f(x) \rightarrow R_y = [6, +\infty)$

$x \leq 0 \rightarrow f(x) \leq -1 \rightarrow R_y = (-\infty, -1]$

$y = x^3+5 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-5} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-5}, x \geq 6$

$y = 5x-1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{5} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{5}, x \leq -1$

واریان پاره‌ای

$f(x) = x^2 - \frac{(x+1)^3}{x+3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

$\frac{x^2(x+3) - (x+1)^3}{x+3} = \frac{-3x-1}{x+3}$

$x = \frac{-3y-1}{y+3} \Rightarrow y = \frac{-4x-2}{2x+4}$

$f^{-1}(x) = \frac{-4x-2}{2x+4} \Rightarrow a = -4, b = -2, c = 2, d = 4$

$f^{-1}(b) = 5, (b < 0)$

$f^{-1}(b) = \frac{-4b-2}{2b+4}, b < 0$

$F(x) = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow F(2) = 0.4, F(\frac{1}{2}) = 0.4$

$y = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow yx^2 - x + y = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y}$

$x = \frac{1 + \sqrt{1-4y^2}}{2y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1 + \sqrt{1-4x^2}}{2x}$

تابع یک به یک نیست - متقابل معکوس نیست - ولی با شرط دامنه می توان تابع یک به یک پیدا کرد!