نام و نام خانوادگی: زهرا صمدی — تکلیف شماره: ۱۰ — کلاس: سه‌شنبه‌ها گروه ۵ دفتر تعجب‌ها را دارم

۱- ب) $f=\{(-1,1)(1,2)(2,3)(a,m-1)(a+1,8)(m,3)\}$

$m=2$ $\quad a+2=1$

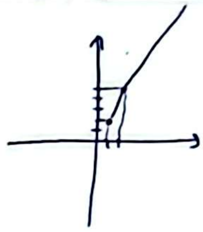
$a=-1$ $\quad n=2$

الف) $f=\{(3,2)(n,5)(3,n^2-n)(m,2)(-1,4)\}$

$n^2-n=2 \rightarrow n^2-n-2=0 \rightarrow (n-2)(n+1)=0 \rightarrow n=-1 \times,\ n=2 \checkmark$

$(-1,5)(-1,4)$

۲- $f(x)=\begin{cases}3x-1 & x\geq 1\\ x+a & x<1\end{cases} \rightarrow (-\infty,2) \rightarrow x+a<2 \rightarrow a>1$



۳- $f(x)=\begin{cases}3x-1 & x\geq 1\\ ax+a-1 & x<0\end{cases} \rightarrow (-\infty,2) \rightarrow ax+a-1<2 \rightarrow a-1<2 \rightarrow a<3$

۴- ب) $y=x^2-4x+2+2-2$

$y_1=(x_1-2)^2-2$, $y_1=(x_2-2)^2-2 \rightarrow (x_1-2)^2-\cancel{2}=(x_2-2)^2-\cancel{2} \rightarrow x_1=\pm x_2$

تابع یک‌به‌یک نیست

الف) $y=x^3+2$

$y_1=x_1^3+2$, $y_1=x_2^3+2 \rightarrow x_2^3+\cancel{2}=x_1^3+\cancel{2} \rightarrow x_1=x_2$

$x=y^3+2 \rightarrow y^3=x-2 \rightarrow y=\sqrt[3]{x-2}$

۵- ب) $y=\dfrac{4+2x}{x+2}$

$y=\dfrac{2(\cancel{x+2})}{(\cancel{x+2})}=2$ تابع ثابت ۲ است پس یک‌به‌یک نیست

الف) $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$ تابع هموگرافیک یک‌به‌یک است

$x=-\dfrac{-2y-1}{y-3} \rightarrow y=\dfrac{2x+1}{x-3}$

۶-

الف) $y=\sqrt{x-3}$

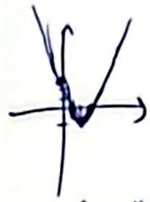
$$\left.\begin{array}{l} y_1=\sqrt{x_1-3} \\ y_2=\sqrt{x_2-3} \end{array}\right\} \to \sqrt{x_1-3}=\sqrt{x_2-3} \to x_1-3=x_2-3 \to x_1=x_2$$

$$x=\sqrt{y-3} \Rightarrow x^2=y-3 \to y=x^2+3 \quad x\geq 0$$

ب) $y=x^2-4x+3$

$$\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2}=2$$

$$-1$$



در بازه $[2,+\infty)$

$$y=(x-2)^2-1 \quad x\in[2,+\infty)$$

$$x=(y-2)^2-1 \to x-1=(y-2)^2$$

$$\to \sqrt{x-1}=y-2 \to y=\sqrt{x-1}+2=f^{-1}(x)$$

۷-

$$f(x)=x+\sqrt{x} \to R=(0,+\infty) \quad , \quad f^{-1}(x)=ax+b-\sqrt{x-c} \to D=(0,+\infty)$$

$$f^{-1}(x)=? \quad x=y+\sqrt{y} \xrightarrow{\text{مربع کامل}} x=y+\sqrt{y}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4} \to x+\frac{1}{4}=\left(\sqrt{y}+\frac{1}{2}\right)^2 \to \sqrt{x+\frac{1}{4}}=\sqrt{y}+\frac{1}{2}$$

$$\to \sqrt{y}=-\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}} \to y=\frac{1}{4}+x+\frac{1}{4}-\sqrt{x+\frac{1}{4}} \to y=x-\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=ax+b-\sqrt{x-c}$$

$$a=1 \quad b=\frac{1}{2} \quad c=-\frac{1}{4}$$

$$a+2b+4c=1+1-1=\boxed{1}$$

۸-

$$y=\frac{x}{\sqrt{x^2-2}} \to y_1=y_2 \to \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-2}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-2}} \to \frac{x_1^2}{x_1^2-2}=\frac{x_2^2}{x_2^2-2} \to \frac{x_1^2+2-2}{x_1^2-2}$$

$$\to 1+\frac{2}{x_1^2-2}=1+\frac{2}{x_2^2-2} \to \frac{2}{x_1^2-2}=\frac{2}{x_2^2-2} \to x_1^2-2=x_2^2-2 \to x_1^2=x_2^2$$

$x_1=\pm x_2$ ← از آنجایی که باید y ها برابر یکدیگر باشند پس باید هم علامت x_1 و x_2 هم علامت باشند پس تابع یک به یک است.

وارون → $x=\frac{y}{\sqrt{y^2-2}} \to x^2=\frac{y^2}{y^2-2} \to x^2y^2-2x^2=y^2 \to y^2(x^2-1)=2x^2 \to y=\boxed{\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{x^2-1}}}$

۹-

$$f^{-1}(x)=\frac{x}{1+|x|} \quad , \quad g(x)=\sqrt{x}-1 \qquad f(x)=\begin{cases} x\geq 0 & \frac{x}{1-x} \\ x<0 & \frac{x}{1+x} \end{cases} \to f\left(-\frac{2}{5}\right)=-\frac{2}{3}$$

$$g^{-1}(x)=y=x+1 \to g^{-1}(x)=(x+1)^2 \to g^{-1}\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{9}{25}$$

$$f\left(-\frac{2}{5}\right)+g^{-1}\left(-\frac{2}{5}\right)=-\frac{2}{3}+\frac{9}{25}=\boxed{\frac{-23}{75}}$$

۱۰-

$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1} \to x=\sqrt[3]{y-1} \to y-1=x^3 \to y=x^3+1$$

$$g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)} \xrightarrow[x\geq -1]{} g(x)=\underbrace{x^3+1}_{b^2}+\underbrace{\sqrt{x^3+1}}_{b}=12 \to b^2+b-12=0 \to b=-4 \ \times \ , \ b=3 \ \checkmark$$

$$\sqrt{x^3+1}=3 \to x^3=8 \to x=2$$

$$g^{-1}(12)=b \to g(b)=12 \to \boxed{g^{-1}(12)=2}$$