

۱. تایید شده B

۲. تایید شده ۱۰

تایید n را پس کنید تا تابع یک به یک شود؟
 $f = \{(x, y), (n, a), (x, n^2 - n), (m, r), (-1, a)\} \rightarrow f = \{(-1, 1), (1, 2), (2, 3), (a, m-1), (a+2, n), (m, r)\}$
 $n^2 - n = 2 \quad n^2 - n - 2 = 0$
 $(n-2)(n+1) = 0$
 $\boxed{n=2} \quad n=-1$ غیرممکن
 $\boxed{m=2}$
 $m=2 \rightarrow m-1 \rightarrow 2-1=1 \quad (a, 1) \Rightarrow a=-1$
 $a=-1 \rightarrow a+2 \Rightarrow -1+2=1 \quad (1, n) \Rightarrow n=2$
 ۱
 ۵

تابع یک به یک است در هر دو راسته شیب
 $f_{(m)} = \begin{cases} x_{m-1} & , x > 1 \\ x+a & , a < 1 \end{cases}$
 $m=1 \Rightarrow m+a < 2$
 $1+a < 2$
 $a < 1$
 $a \leq 1$
 $\boxed{a \leq 1}$
 ۲
 ۶

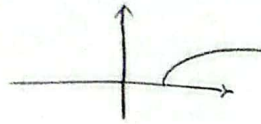
تابع یک به یک است در هر دو راسته شیب
 $f_{(m)} = \begin{cases} x_{m-1} & , m > 1 \\ a+m-1 & , m \leq 0 \end{cases}$
 بر $(x, a+m)$ است
 در هر دو راسته شیب
 این تابع یک به یک است
 این تابع یک به یک است
 $\begin{cases} a > 0 \\ a-1 < 2 \rightarrow a < 3 \end{cases}$
 $\Rightarrow 0 < a < 3$
 ۳
 ۵

تابع یک به یک است در هر دو راسته شیب
 $y = n^2 + 2$
 $y_1 = y_2 \Rightarrow n_1 = n_2$
 $n_1^2 + 2 = n_2^2 + 2$
 $n_1 = n_2 \rightarrow n^2 = y - 2$
 $n = \sqrt{y-2} \Rightarrow y = n^2 + 2$
 $f^{-1}(n) = \sqrt{n-2}$
 ۴
 ۶

تابع یک به یک است در هر دو راسته شیب
 $y = \frac{m+1}{n-2}$
 $y_1 = y_2 \Rightarrow \frac{m_1+1}{n_1-2} = \frac{m_2+1}{n_2-2}$
 $(m_1+1)(n_2-2) = (m_2+1)(n_1-2)$
 $m_1 n_2 - 2m_1 + n_2 - 2 = m_2 n_1 - 2m_2 + n_1 - 2$
 $m_1 n_2 - 2m_1 + n_2 = m_2 n_1 - 2m_2 + n_1$
 $m_1 n_2 - m_2 n_1 = 2m_1 - 2m_2 + n_1 - n_2$
 $(m_1 n_2 - m_2 n_1) = 2(m_1 - m_2) + (n_1 - n_2)$
 $(m_1 n_2 - m_2 n_1) = 2(m_1 - m_2) + (n_1 - n_2)$
 $\Rightarrow m_1 = m_2 \quad n_1 = n_2$
 $f^{-1}(m) = \frac{m+1}{m-2}$
 ۵
 ۶

یک به یک درون تابع را بررسی کنید و در صورت امکان ضابطه تابع را بیابید.

الف) $y = \sqrt{x-2}$



$$y = \sqrt{x-2} \rightarrow x = \sqrt{y+2}^2$$

$$x-2 = y \rightarrow y = x-2 \Rightarrow$$

$$f^{-1}(x) = x+2 \quad x \geq 0$$

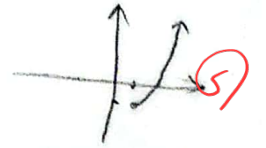
ب) $y = x^2 - 4x + 3 \quad x \in [2, +\infty)$

توجه: دامنه و کدورت تابع را بیابید.

$$y = (x-2)^2 - 1 \Rightarrow x-2 = \pm \sqrt{y+1}$$

$$x = \pm \sqrt{y+1} + 2$$

$$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+1}$$



نکته: - جدول دامنه و کدورت تابع را در جدول زیر بنویسید.

پ) $a+2b+3c$ فرض $f^{-1}(x) = ax+b-\sqrt{x-c}$ در $(0, +\infty)$ و $f(x) = x + \sqrt{x}$ را بیابید.

$$y = x + \sqrt{x} \rightarrow (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^2 - \frac{1}{x}$$

$$x = (\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{y}})^2 - \frac{1}{y} \rightarrow x + \frac{1}{y} = (\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{y}})^2 \rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x + \frac{1}{y}} - \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\xrightarrow{\text{رابطه}} y = x + \frac{1}{y} + \frac{1}{y} - \sqrt{x + \frac{1}{y}} \Rightarrow f^{-1}(x) = x + \frac{1}{y} - \sqrt{x + \frac{1}{y}}$$

$$1 + 2(\frac{1}{y}) + 3(-\frac{1}{y}) = 1$$

$$a=1 \quad b=\frac{1}{y} \quad c=-\frac{1}{y}$$

د) یک به یک درون تابع را بررسی کنید و در صورت امکان ضابطه تابع را بیابید.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}} \quad f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}} \rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-2}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-2}} \rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2-2} = \frac{x_2^2}{x_2^2-2}$$

$$x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 = x_2^2 x_1^2 - 2x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}} \Rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{y^2-2}} \rightarrow x^2 = \frac{y^2}{y^2-2} \Rightarrow x^2 y^2 - 2x^2 = y^2 \Rightarrow y^2 x^2 - y^2 = 2x^2$$

$$y^2 = \frac{2x^2}{x^2-1} \rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{2x^2}{x^2-1}} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

$$g \text{ دایره وار} = -\frac{1}{a} \rightarrow x, g = -\frac{1}{a}$$

$$g(x) = \sqrt{x}-1$$

$$\sqrt{x}-1 = -\frac{1}{a} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{a} \Rightarrow x = \frac{1}{a^2}$$

$$f(-\frac{1}{a}) + g^{-1}(-\frac{1}{a}) = ?$$

$$-\frac{1}{a} = f(x) \rightarrow -\frac{1}{a} = \sqrt{x}-1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 - \frac{1}{a}$$

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a} = -\frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\frac{x}{1+|x|} = -\frac{1}{a} \Rightarrow ax = -1 - |x| \Rightarrow ax = -1 + x \Rightarrow x(a-1) = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{a-1}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$$

$$g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)}$$

$$g^{-1}(12) = ?$$

$$12 = g(x)$$

$$y = \sqrt{x-1} \Rightarrow x = \sqrt{y+1}^2 \Rightarrow x-1 = y \Rightarrow x = y+1$$

$$f(x) = x+1$$

$$g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)} = 12$$

$$f(x) = 4 \quad x+1 = 4 \quad x = 3 \quad |x-1|$$