

۲۵

پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ... ۱۹۸۰ ... کلاس ... یازدهم متوسط B ... در ریاضیات اماتانی ...

الف)  $f = \{(3, 2)(n, 5)(3, n^2 - n)(m, 2)(-1, 4)\}$   $n^2 - n = 2 \Rightarrow n(n-1) = 2 \Rightarrow n = 3 \mid m = 3 \mid$

ب)  $f = \{(-1, 1)(1, 2)(2, 3)(a, m-1)(a+2, n)(m, 3)\}$   $m = 2 \mid a = -1 \mid n = 2$

$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x \geq 1 \\ x+a & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} = 2[2, +\infty) \\ = 2 \mid 1+a \leq 2 \Rightarrow a \leq 1 \Rightarrow a = (-\infty, 1] \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x \geq 1 \\ ax+a-1 & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} = 2[2, +\infty) \\ = 2 \mid x=0 \Rightarrow a-1 < 2 \Rightarrow a < 3 \leq a < 0 \end{cases}$

$a < 0 \Rightarrow a = -\infty \Rightarrow x \Rightarrow a = (0, 3)$

$a=0 \Rightarrow$  خط است و یک به یک نیست

الف)  $y = x^3 + 2 \Rightarrow y = x_1^3 + 2 \Rightarrow y = x_2^3 + 2 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$  یک به یک ✓

$x^3 = y - 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-2} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x-2} \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{x-2}$

ب)  $x^2 - 2x + 2 = ax^2 + bx + c \Rightarrow$  یک به یک نیست  $\Rightarrow$  تابع به صورت نمی باشد

الف)  $y = \frac{3x+1}{x-2} \Rightarrow \frac{3x_1+1}{x_1-2} = \frac{3x_2+1}{x_2-2} \Rightarrow 3x_1x_2 - 4x_1 + x_2 - 2 = 3x_2x_1 - 4x_2 + x_1 - 2$  تابع هولرایی  $\Rightarrow$  یک به یک نیست

$\Rightarrow -4x_1 + x_2 = -4x_2 + x_1 \Rightarrow -5x_1 = -5x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$  یک به یک است ✓

$\Rightarrow yx - 2y = 3x + 1 \Rightarrow yx - 3x = 2y + 1 \Rightarrow x(y-3) = 2y+1 \Rightarrow x = \frac{2y+1}{y-3} \Rightarrow y = \frac{2x+1}{x-3}$  تابع هولرایی نیست و تابع انالیز تابع ثابت است و تابع درجه یک نیست

ب)  $y = \frac{x+2x}{x+2} = 2 \Rightarrow y = 2$  تابع هولرایی نیست و تابع انالیز تابع ثابت است و تابع درجه یک نیست

$\frac{x+2x_1}{x_1+2} = \frac{x+2x_2}{x_2+2} \Rightarrow \frac{x^2+2x_1x}{x_1+2} = \frac{x^2+2x_2x}{x_2+2} \Rightarrow x^2x_1 + 2x_1^2x + 2x_1x_2 = x^2x_2 + 2x_2^2x + 2x_2x_1$  ثابت یک به یک نیست

$$\text{الف) } y = \sqrt{x-3} \Rightarrow \sqrt{x_1-3} = \sqrt{x_2-3} \Rightarrow x_1-3 = x_2-3 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{یک به یک است}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{y-3} \Rightarrow x^2 = y-3 \Rightarrow y = x^2+3 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2+3 \quad x \geq 0$$

$$\text{ب) } y = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)(x-1)}, x \in [2, +\infty) \Rightarrow -\frac{b}{4a} = -\frac{-4}{2} = +2 \quad \text{یک به یک است}$$

$$\Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow x^2-4x+(3-y)=0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4(3-y)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4(y+1)}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{y+1}}{2} = 2 \pm \sqrt{y+1}$$

$$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{y+1} \quad D_{f^{-1}} = [-1, +\infty), y \geq -1$$

$$x \geq 0 \Rightarrow a+2b+3c \text{ و } f^{-1}(x) = ax+b-\sqrt{x-c} \text{ و } x \in (0, +\infty) \text{ و } f(x) = x+\sqrt{x} \quad \text{و این تابع}$$

$$f(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{x} \Rightarrow y = \frac{x+\sqrt{x}}{x} \Rightarrow yx = x+\sqrt{x} \Rightarrow yx-x = \sqrt{x} \Rightarrow x(y-1) = \sqrt{x} \Rightarrow x = \frac{1}{(y-1)^2} \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y^2} - \frac{y\sqrt{y+1}}{y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1+x-\sqrt{1+x}}{x} = ax+b-\sqrt{x-c} \quad ax+b = \frac{1}{y} + x \Rightarrow a=1, b=\frac{1}{y}$$

$$\sqrt{x-c} = -\frac{1}{y}\sqrt{1+x} \Rightarrow x-c = \frac{1}{y^2}(1+x) \Rightarrow x-c = \frac{1}{y^2} + x \Rightarrow c = -\frac{1}{y^2}$$

$$a+2b+3c = 1 + 2\left(\frac{1}{y}\right) + 3\left(-\frac{1}{y^2}\right) = 1 + \frac{2}{y} - \frac{3}{y^2} = \frac{y^2 + 2y - 3}{y^2} = \frac{(y+3)(y-1)}{y^2}$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}} \quad \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-2}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-2}} \Rightarrow x_1\sqrt{x_2^2-2} = x_2\sqrt{x_1^2-2} \Rightarrow x_1^2(x_2^2-2) = x_2^2(x_1^2-2)$$

$$\Rightarrow x_1^2x_2^2 - 2x_1^2 = x_2^2x_1^2 - 2x_2^2 \Rightarrow -2x_1^2 = -2x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2 \quad \text{یک به یک است}$$

$$x = \frac{y}{\sqrt{y^2-2}} \Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{y^2-2} \Rightarrow y^2 = \frac{x^2y^2}{x^2-1} \Rightarrow y^2(x^2-1) = x^2y^2 \Rightarrow y^2x^2 - y^2 = x^2y^2 \Rightarrow -y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^2}{x^2-1} \Rightarrow y = \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} \Rightarrow y = \frac{x^2}{x^2-1}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad g(x) = \sqrt{x}-1 \quad f\left(-\frac{x}{2}\right) + g^{-1}\left(-\frac{x}{2}\right)$$

$$g(x) = \sqrt{x}-1 \Rightarrow y = \sqrt{x}-1 \Rightarrow \sqrt{x} = y+1 \Rightarrow x = (y+1)^2 \Rightarrow g^{-1}(y) = (y+1)^2$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|} \Rightarrow x = \frac{y}{1+|y|} \Rightarrow \begin{cases} |y| = y \Rightarrow x = \frac{y}{1+y} \Rightarrow x-y = \frac{y}{1+y} \Rightarrow x-y = y(1-x) \Rightarrow y = \frac{x}{1-x} \\ |y| = -y \Rightarrow x = \frac{y}{1-y} \Rightarrow x-y = \frac{y}{1-y} \Rightarrow x-y = y(1+x) \Rightarrow y = \frac{x}{1+x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & x \geq 0 \\ \frac{x}{1+x} & x < 0 \end{cases} \quad f\left(-\frac{x}{2}\right) + g^{-1}\left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{-\frac{x}{2}}{1+\frac{x}{2}} + \left(-\frac{x}{2}+1\right)^2 = -\frac{x}{2+x} + \frac{x^2}{4} = \frac{-x^2 - 2x + 4}{4}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-1} \Rightarrow x^3 = y-1 \Rightarrow y = x^3+1 \Rightarrow f(x) = x^3+1$$

$$g(x) = \frac{x^3+1}{x^2} + \sqrt{x^3+1} \quad g^{-1}(12) \Rightarrow y=12 \Rightarrow g(x)=12$$

$$g^{-1}(12) = g(x) = 12 \Rightarrow t^3+t = 12 \Rightarrow t^3+t-12=0 \quad t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

$$t = -4 = \sqrt{x^3+1} \quad t = 3 = \sqrt{x^3+1} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow g^{-1}(12) = 2 \quad g(2) = 8 + \sqrt{8} = 12$$