تکلیف شماره ۱۰ آیدا محمدنژاد یازدهم ۱۵

۱)

الف) $f=\{(۳,۲)(n,۵)(۳,n^۲-n)(m,۲)(-۱,۴)\}$

$n^۲-n=۲ \to n^۲-n-۲=۰ \to (n-۲)(n+۱)$ $\to n=-۱$ غ ق ق ، $\to n=۲$ ق

[illegible]

ب) $f=\{(-۱,۱)(۱,۲)(۲,۳)(a,m-۱)(a+۲,n)(m,۳)\}$

$(-۱,۱)(۱,۲)(۲,۳)\cancel{(-۱,۱)}(۱,۲)(۲,۳)$

$\boxed{m=۲}$ $\boxed{n=۲}$ $\boxed{a=-۱}$ ✓

---

۲)

$$f(x)=\begin{cases} ۳x-۱ \,; & x\geq ۱ \\ x+a \,; & x<۱ \end{cases}$$

$a=?$

نباید اشتراک داشته باشند!

$f(۱)=۳(۱)-۱=۲ \to R_۱=[۲,+\infty)$

$R_۲=(-\infty,۱+a) \Longrightarrow ۱+a\leq ۲ \Longrightarrow \boxed{a\leq ۱}$

عالی

---

۳)

$$f(x)=\begin{cases} ۳x-۱ \,; & x\geq ۱ \\ ax+a-۱ \,; & x\leq ۰ \end{cases}$$

$a=?$

$ax+a-۱ \rightsquigarrow a>۰$

$y=۳x-۱ \Rightarrow x\geq ۱ \to ۳(۱)-۱=②$

$\hookrightarrow y\geq ۲$

$a<۳$

حدود a $\boxed{۰<a<۳}$

~~[illegible]~~

$y=\cancel{a(۰)}+a-۱=a-۱ \rightsquigarrow y\leq a-۱$

---

۴)

الف) $y=x^۳+۲$ $y_۱=y_۲ \to x_۱^۳+۲=x_۲^۳+۲ \to x_۱=x_۲$ یک به یک ✓

$x^۳=y-۲ \rightsquigarrow x=\sqrt[۳]{y-۲} \rightsquigarrow y=\sqrt[۳]{x-۲} \rightsquigarrow f^{-1}(x)=\sqrt[۳]{x-۲}$

ب) $y=x^۲-۴x+۲$

ضابطه به شکل سهمی است پس یک به یک نیست ✓

و معکوس نداره

---

۵)

الف) $y=\dfrac{۳x+۱}{x-۲}$ $yx-۲y=۳x+۱ \Rightarrow yx-۳x=۲y+۱ \Rightarrow x(y-۳)=۲y+۱ \Rightarrow$

$x=\dfrac{۲y+۱}{y-۳} \rightsquigarrow y=\dfrac{۲x+۱}{x-۳} \Rightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{۲x+۱}{x-۳}$

ب) $y=\dfrac{۴+۲x}{x+۲} \Rightarrow \dfrac{۲\cancel{(۲+x)}}{\cancel{x+۲}} \Rightarrow y=۲$

یک به یک ✗

معکوس پذیر ✗

(۶

الف) $y=\sqrt{x-۳}$ $\quad y_۱=y_۲\to\sqrt{x_۱-۳}=\sqrt{x_۲-۳}\to x_۱=x_۲$ یک به یک

$(x)^۲=(\sqrt{y-۳})^۲\to x^۲=y-۳ \quad y=x^۲+۳$

ب) $y=x^۲-۴x+۳,\ x\in[۲,+\infty)$

$y=x^۲-۴x+۳+۱-۱\to y=x^۲-۴x+۴-۱\Rightarrow y=(x-۲)^۲-۱\Rightarrow(x-۲)^۲=y+۱\Rightarrow$

$x-۲=\pm\sqrt{y+۱}\Rightarrow x=۲\pm\sqrt{y+۱}$

$f^{-۱}(x)=۲+\sqrt{x+۱}$ $\quad$ عکس تابع $\to$ در بازه‌ی $(۲,+\infty)$ است [illegible] تابع معکوس

(۷

$f(x)=x+\sqrt{x}$ $\quad f(x)=x+\sqrt{x}\to\sqrt{x}=t$

$f^{-۱}(x)=ax+b-\sqrt{x-c}$ $\quad (۰,+\infty)\to f^{-۱}(x)=ax+b-\sqrt{x-c}$ $\quad \underset{y}{f(x)}=t^۲+t$

$a+۲b+۴c=$؟ $\quad t^۲+t-y=۰\Rightarrow t=\frac{-۱\pm\sqrt{۱+۴y}}{۲}\rightsquigarrow t=\frac{-۱+\sqrt{۱+۴y}}{۲}$ $\quad \boxed{a=۱}\ \boxed{b=\frac{۱}{۲}}\ \boxed{c=-\frac{۱}{۴}}$

$\sqrt{x}=\frac{-۱+\sqrt{۱+۴y}}{۲}\Rightarrow x=\left(\frac{-۱+\sqrt{۱+۴y}}{۲}\right)^۲\Rightarrow f^{-۱}(x)=\left(\frac{-۱+\sqrt{۱+۴x}}{۲}\right)^۲$ $\quad a+۲b+۴c=\boxed{۱}$

$\Rightarrow\frac{۱+۱+۴x-۲\sqrt{۱+۴x}}{۴}=\frac{۱}{۲}+x-\frac{۱}{۲}\sqrt{۱+۴x}\Rightarrow x+\frac{۱}{۲}-\sqrt{\frac{۱}{۴}+x}=ax+b-\sqrt{x-c}$

(۸

$y=\frac{x}{\sqrt{x^۲-۲}}\to\frac{x_۱}{\sqrt{x_۱^۲-۲}}=\frac{x_۲}{\sqrt{x_۲^۲-۲}}\Rightarrow x_۲^۲x_۱^۲-۲x_۱^۲=x_۱^۲x_۱^۲-۲x_۲^۲\Rightarrow x_۱^۲=x_۲^۲\Rightarrow$

$\Rightarrow x_۱=\pm x_۲$ $\quad$ یک به یک $x_۱=x_۲$

~~$f(x_۱)=f(x_۲)$~~ $\quad y=\frac{x}{\sqrt{x^۲-۲}}\Rightarrow x=\frac{y}{\sqrt{y^۲-۲}}\Rightarrow x^۲=\frac{y^۲}{y^۲-۲}\to x^۲y^۲-۲x^۲=y^۲\Rightarrow$

$y^۲x^۲-۲y^۲=x^۲\Rightarrow y^۲(x^۲-۱)=۲x^۲\Rightarrow y^۲=\frac{۲x^۲}{x^۲-۱}\rightsquigarrow y=\pm\frac{\sqrt{۲x^۲}}{x^۲-۱}\to y=\frac{\sqrt{۲}x}{\sqrt{x^۲-۱}}$

(۹

$f^{-۱}(x)=\frac{x}{۱+|x|}$ $\quad g^{-۱}(-\frac{۲}{۵})+f(-\frac{۲}{۵})=$؟

$g(x)=\sqrt{x}-۱$ $\quad -\frac{۲}{۵}=\frac{x}{۱+|x|}\xrightarrow{x<۰}۵x=-۲+۲x\Rightarrow ۳x=-۲\Rightarrow x=-\frac{۲}{۳}$

$\sqrt{x}-۱=-\frac{۲}{۵}\to(\sqrt{x})^۲=(\frac{۳}{۵})^۲\to x=\frac{۹}{۲۵}$

$\frac{۹}{۲۵}-\frac{۲}{۳}=\frac{-۲۳}{۷۵}$

(۱۰

$f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$ $\quad g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}$ $\quad g(x)=x^۳+۱+\sqrt{x^۳+۱}$

$g^{-۱}(۱۲)=$؟ $\quad x=\sqrt[۳]{y-۱}\to x^۳=y-۱\to\overset{f(x)}{y}=x^۳+۱$ $\quad g(x)=۱۲$

$t^۲+t=۱۲\Rightarrow t^۲+t-۱۲=۰\to\overset{-۴}{(t+۴)}\overset{③}{(t-۳)}=۰$ $\quad x^۳+۱=t^۲$ $\quad \underbrace{\sqrt{x^۳+۱}}_{t}=t$

$(۳)^۲=(\sqrt{x^۳+۱})^۲\to ۹=x^۳+۱\Rightarrow ۸=x^۳\Rightarrow\boxed{x=۲}$