عاطفه سورعطی پور سال دوم سه شنبه

۱- مقدار x به گونه‌ای که ما بسازند تابع یک به یک

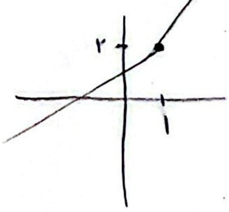
الف) $f=\{(3,2),(x,5),(3,x^2-x),(m,2),(-1,4)\}$

$(3,2)=(3,x^2-x) \rightarrow x^2-x=2 \rightarrow x^2-x-2=0 \rightarrow x=2$ ، $x=-1 \rightarrow x=-1 \rightarrow (-1,5)\ ,\ (-1,4) \rightarrow$ نقض $\rightarrow$

$\boxed{x=2}$

ب) $\{(-1,1),(1,2),(2,3),(a,m-1),(a+2,x),(m,3)\}$

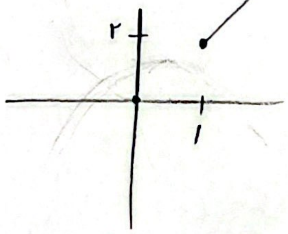
$\boxed{m=2} \rightarrow (a,2-1) \Rightarrow (a,1) \rightarrow \boxed{a=-1} \Rightarrow ((-1)+2,x) \rightarrow (1,x) \rightarrow \boxed{x=2}$



۲- تابع $f(x)=\begin{cases}3x-1 & x\geq 1\\ x+a & x<1\end{cases}$ یک به یک، حدود a؟

$x+a\leq 2 \rightarrow 1+a\leq 2 \rightarrow \boxed{a\leq 1}$

$a=(-\infty,1]$



۳- تابع $f(x)\begin{cases}3x-1\ ; & x\geq 1\\ ax+a-1\ ; & x<0\end{cases}$ یک به یک است حدود a؟

$a>0$ (I)

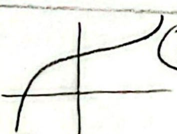
برای اینکه یک به یک باشد شیب باید >0 = نمی‌تواند صفر باشد

$a-1<2 \rightarrow a<3$ (II)

$\boxed{\text{I}\cap\text{II} \rightarrow (0,3)}$

۴- یک به یک بودن بررسی شود و در صورت امکان ضابطه بدست آید.

الف) $y=x^3+2$

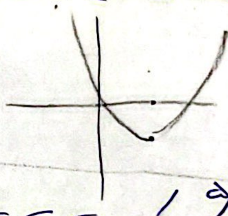


یک به یک ✓

$x=y^3+2 \rightarrow y^3=\sqrt[3]{x-2} \rightarrow y=\sqrt[3]{x-2}$

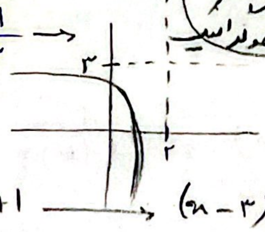
ب) $y=x^2-4x+2$

$\rightarrow$ یک به یک ✗



۵- یک به یک بودن بررسی شده و در صورت امکان ضابطه معکوس؟

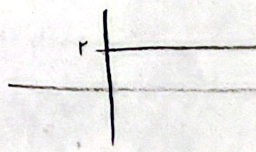
الف) $y=\frac{3x+1}{x-2} \rightarrow$ تابع هموگرافیک است $\rightarrow$ ✓ یک به یک



$x=\frac{2y+1}{y-2} \rightarrow$

$xy-2x=2y+1 \rightarrow (x-3)y=3x+1 \rightarrow y=\frac{3x+1}{x-3}$

ب) $y=\frac{4+2x}{x+2}=2 \rightarrow$ ✗ یک به یک

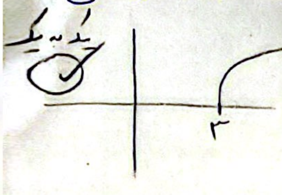


۶- یک به یک بودن به روش دلخواه بررسی و ضابطه معکوس را بدست آورید.

الف) $y=\sqrt{x-3} \rightarrow x=\sqrt{y-3} \rightarrow x^2=y-3 \rightarrow$

$x\geq 3$

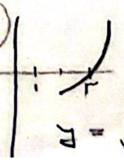
یک به یک ✓



$\boxed{\begin{matrix}y=x^2+3\\ x\geq 0\end{matrix}}$

ب) $y=x^2-4x+3\ ,\ x\in[2,+\infty)$

یک به یک ✓



$\rightarrow y=(x-2)^2-1 \xrightarrow{\text{معکوس}} x=(y-2)^2-1 \rightarrow$

$x+1=(y-2)^2 \xrightarrow{\pm} \sqrt{x+1}+2=y \rightarrow$

$y=\sqrt{x+1}+2$ | برای بیشتر از ۲ مثبت قبول

۷- وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x}$ در بازه $(0,+\infty)$ به صورت $g(x)=ax+b-\sqrt{x-c}$ است حاصل $a+2b+4c$

$$y=x+\sqrt{x}\rightarrow x=y+\sqrt{y}\rightarrow x-y=\sqrt{y}\rightarrow x^2+y^2-2yx=y\rightarrow y^2-y(2x+1)+x^2=0$$

$$y^2-y(2x+1)+x^2=0\rightarrow y=\frac{2x+1\pm\sqrt{\cancel{4x^2}+4x+1-\cancel{4x^2}}}{2}=\frac{2x+1}{2}+\sqrt{\frac{4x+1}{4}}\Rightarrow \boxed{x+\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}}$$

$$1+1+(-1)=1 \leftarrow a=1 \quad 2b=1 \quad 4c=-1$$

۸- یک به یک بودن تابع $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}$ را بررسی کنید و در صورت امکان ضابطه معکوس؟

$$\underbrace{\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-2}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-2}}}_{(+)\quad(+)}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\frac{x_1^2}{x_1^2-2}=\frac{x_2^2}{x_2^2-2}\rightarrow \cancel{x_1^2x_2^2}-2x_2^2=\cancel{x_1^2x_2^2}-2x_1^2\rightarrow$$

$$\boxed{x_1=\pm x_2}\rightarrow \text{نمی‌تواند مختلف العلامت باشند}\rightarrow \boxed{x_1=x_2}\ \checkmark \ \text{یک به یک}$$

معکوس $= \ x=\frac{y}{\sqrt{y^2-2}}\rightarrow x^2=\frac{y^2}{y^2-2}\rightarrow x^2y^2-2x^2=y^2\rightarrow y^2(x^2-1)=2x^2\rightarrow$

$$y^2=\frac{2x^2}{x^2-1}\rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{2x^2}{x^2-1}}\rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{2}x}{x^2-1}\rightarrow x\ ,\ y \ \text{هم علامت}\rightarrow$$

$$\boxed{y=+\frac{\sqrt{2}x}{x^2-1}}$$

۹- اگر $f^{-1}(x)=\frac{x}{1+|x|}$ و $g(x)=\sqrt{x}-1$ باشد حاصل $f(-\frac{2}{5})+g^{-1}(-\frac{2}{5})$ را بدست آورید.

دامنه $f(x)$ = برد $f^{-1}(x)$ ← هر چیزی که در $f(x)$ وارد می‌شود = برد $f^{-1}(x)$ ⇐

$$\frac{x}{1+|x|}=\frac{-2}{5}\rightarrow 5x=-2-2|x|\rightarrow$$

وقتی که $-\frac{2}{5}$ ورودی $f(x)$ است پس یعنی خروجی $f^{-1}(x)$

شامل اعداد منفی است ← $\boxed{x<0}$

$$5x=-2-2(-x)\Rightarrow 5x=-2+2x\rightarrow$$

$$3x=-2\rightarrow \boxed{x=\frac{-2}{3}}\rightarrow \boxed{f(\frac{-2}{5})=\frac{-2}{3}}$$

$$\sqrt{x}-1=-\frac{2}{5}\rightarrow\sqrt{x}=\frac{3}{5}\rightarrow\boxed{x=\frac{9}{25}}$$

$$\frac{-2}{3}+\frac{9}{25}\Rightarrow\frac{-50+27}{75}\rightarrow\boxed{-\frac{23}{75}}$$

$g(2)=$

۱۰- اگر $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}$ و $g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}$ باشد حاصل $g^{-1}(12)$ را بدست آورید.

$$g^{-1}(12)\rightarrow f(x)+\sqrt{f(x)}=12\rightarrow\boxed{f(x)=9}\xRightarrow{x=?}\sqrt[3]{x-1}\Rightarrow\sqrt[3]{(9)-1}=2$$

دامنه $f^{-1}(x)$ = برد $f(x)$

$$\boxed{g^{-1}(12)=2}$$