

۱- الف) $4x^2 - 5x - 420 \rightarrow x^2 - 5x - 105 \rightarrow (x-9)(x+12) \rightarrow 9, -12 \rightarrow \frac{9}{4}, -\frac{12}{4} \rightarrow x = \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$
 ب) $3x^2 - 11x - 320 \rightarrow x^2 - 11x - 9 = 0 \rightarrow (x-9)(x+1) \rightarrow 9, -1 \rightarrow \frac{9}{3}, -\frac{1}{3} \rightarrow x = 3, -\frac{1}{3}$
 ج) $6x^2 - 5x - 320 \rightarrow x^2 - 5x - 120 \rightarrow (x-4)(x+3) \rightarrow 4, -3 \rightarrow \frac{4}{2}, -\frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{2}{1}, -\frac{3}{2}$
 د) $2x^2 - 5x - 1220 \rightarrow x^2 - 5x - 2420 \rightarrow (x-1)(x+3) \rightarrow 1, -3 \rightarrow \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$

۲- الف) $x^2 - 5x - 12 = 0 \rightarrow (x-7)(x+2) \rightarrow x = 7, -2$
 ب) $2x^2 + 5x + 3 = 0 \rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \rightarrow (x+2)(x+3) \rightarrow -2, -3 \rightarrow x = -2, -3$
 ج) $x^2 + 2x + 3 = 0 \rightarrow \Delta = (2)^2 - 4(1)(3) = 4 - 12 = -8 < 0 \rightarrow \Delta < 0 \rightarrow$ ریشه ندارد
 د) $3x^2 + 3x - 2 = 0 \rightarrow \Delta = (3)^2 - 4(3)(-2) = 9 + 24 = 33 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{4}$

۳- $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{2, 3\}$
 $A \cap B = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$ $B^c = \{(2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$
 $A \cap B - B^c = \{(1,2), (1,3)\}$

۴- الف) $f(x) = \{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (3, m+2), (m+2, 4)\}$
 ب) $g(x) = \{(3, m^2), (2, 1), (m, 4), (3, m+2), (-2, m), (-1, 3)\}$
 $m^2 = m+2 \rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \rightarrow (m+1)(m-2) = 0 \rightarrow m = -1, 2$
 غرض: وقتی تابعی یک به یک باشد، می‌توانیم آن را معکوس کنیم. برای معکوس کردن تابعی که یک به یک نیست، باید آن را به چند تابع یک به یک تقسیم کنیم. در اینجا $(2, 1)$ و $(2, 4)$ در f و g تکرار شده‌اند.

۵- $f(x) = \{(1, a^2), (1, 3a-2), (a^2, 3a+2)\}$
 $a^2 = 3a-2 \rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \rightarrow (a-2)(a-1) = 0 \rightarrow a = 2, 1$
 غرض: وقتی $a=1$ یا $a=2$ باشد، تابع یک به یک نیست.

۶- $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & x \leq 1 \\ ax+b & 1 < x \leq 2 \\ x^2 & x \geq 2 \end{cases}$
 $(1)^2 - 1 = a(1) + b \rightarrow a + b = 0$
 $(2)^2 = a(2) + b \rightarrow 2a + b = 4$
 $a + b = 0 \rightarrow -a - b = 0$
 $2a + b = 4 \rightarrow 2a - a - b = 4 \rightarrow a = 4, b = -4$
 $\Rightarrow a \times b = 4 \times (-4) = -16$

۷- $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & x \geq k \\ 4-3x & x < k \end{cases} \rightarrow 2k-3 = 4-3k \rightarrow 5k = 7 \rightarrow k = \frac{7}{5}$

۸- الف) $y^2 - 4y = x^2 - 4x + 3$
 $y_1^2 - 4y_1 = x_1^2 - 4x_1 + 3$
 $y_2^2 - 4y_2 = x_2^2 - 4x_2 + 3$
 $x_1 = x_2 \rightarrow y_1^2 - 4y_1 = y_2^2 - 4y_2 \rightarrow (y_1 - y_2)(y_1 + y_2 - 4) = 0$
 $(y_1 - y_2) = (4y_1 - 4y_2)$
 $\rightarrow (y_1 - y_2)(y_1 + y_2 - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 - y_2 = 0 \rightarrow y_1 = y_2 \\ y_1 + y_2 - 4 = 0 \rightarrow y_1 = \frac{4 - y_2}{2} \end{cases}$
 $y_1 = \frac{4 - y_2}{2} \rightarrow y_1 = \pm \sqrt{2}$

تابع نیست مثال نقض $\leftarrow x=0 \rightarrow y=\pm 3$ ج) $|x|+|y|=3 \rightarrow x=0 \rightarrow y=\pm 3$

تابع نیست $\leftarrow y=\pm 1$ ج) $|y|=\sqrt{1-\cos x} \rightarrow 1-\cos x \geq 0 \rightarrow x=\frac{\pi}{2} \rightarrow y=\pm 1$

تابع هست $\leftarrow$ فقط در این نقطه جواب می دهی $\rightarrow$ دو عبارت صفر شده $\rightarrow$ دو عبارت صفر شده $\rightarrow$ $y^2+x^2+2x+1=0 \rightarrow y^2+(x+1)^2=0$

تابع است. $\rightarrow y_1=y_2$ الف) $\sqrt[3]{y}+x^2=2x-2 \rightarrow \sqrt[3]{y_1}=-x_1^2+2x_1-2 \xrightarrow{x_1=x_2} \sqrt[3]{y_1}=\sqrt[3]{y_2} \rightarrow y_1=y_2$

ب) $y^2+2y=5x \rightarrow y_1^2+2y_1=5x_1 \xrightarrow{x_1=x_2} y_1^2+2y_1=y_2^2+2y_2$

$\rightarrow (y_1^2-2y_1)=(y_2^2-2y_2) \xrightarrow{\text{فیل فاکتور}} (y_1-y_2)(y_1+y_1-2)(y_2+y_2-2)=0 \rightarrow (y_1-y_2)(y_1^2+y_1y_2+y_2^2+2)=0$

$\rightarrow \begin{cases} y_1-y_2=0 \rightarrow y_1=y_2 \\ y_1^2+y_1y_2+y_2^2+2=0 \rightarrow y_1=-y_2 \pm \sqrt{y_1^2-2(y_1^2+2)} \end{cases} \rightarrow \Delta=2y_1^2-2(y_1^2+2)=-4 < 0$

پس $y_1=y_2$ تابع است. $\leftarrow$ می نشینیم بیکدیگر $y_1^2+y_1y_2+y_2^2+2=0$ تابع هست.

تابع نیست (مثال نقض) $\leftarrow$ می توانیم معادله را با $x=0$ و $y=0$ در $x \sin y = y \sin x$ $\rightarrow 0=0$ الف) $x \sin y = y \sin x \rightarrow x=0 \rightarrow 0 \sin y = y \sin 0 \rightarrow 0=0$

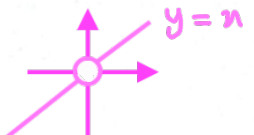
ب) $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 2 \rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = 2 \rightarrow \frac{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2}{\sqrt{xy}} = 2 \rightarrow x+y=2\sqrt{xy}$

$\rightarrow x-2\sqrt{xy}+y=0 \rightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=0 \rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{y} \rightarrow x=y$ تابع است. $\leftarrow$ (نقطه $(0,0)$ را در نظر نگیر)

ب) $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 2$

این عبارت تنها زمانی برقرار است که $\sqrt{\frac{x}{y}} = 1$ باشد پس

$\sqrt{\frac{x}{y}} = 1 \rightarrow \frac{x}{y} = 1 \rightarrow x=y$ (نقطه $(0,0)$ را در نظر نگیر)



$$(4 - \text{الف}) \quad (3, m^2), (3, m+2) \leadsto m^2 = m+2 \leadsto m^2 - m - 2 = 0.$$

$$m = 2 \rightarrow (2, 1), (2, 4) \quad x$$

$m = -1 \rightarrow$ هیچ در زنجیر مرتب متناهی درایی اول یکسان ندارند پس قابل قبول است ✓

$$(4 - \text{ب}) \quad (3, m^2), (3, m+2) \leadsto m^2 = m+2 \leadsto m^2 - m - 2 = 0.$$

$$m = 2 \rightarrow (2, 1), (2, 4) \quad x$$

$$m = -1 \rightarrow (-1, 4), (-1, 1) \quad x \quad \text{بنا بر این هیچ مقدار } m \text{ عبارت تکرر نیست!}$$